

# **Modelação Computacional de Espumas Metálicas**

## **Modelação Constitutiva do Comportamento Mecânico de Espumas Metálicas**

*Rui Pedro Moreira das Neves*

### **Dissertação do MIEM**

Orientador: Professor Doutor Francisco Pires



# **FEUP**

**Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto**

**Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica**

**Julho de 2009**

# Resumo

As espumas metálicas são uma classe de materiais muito distinta, a nível de propriedades físicas e mecânicas, comparativamente com os restantes materiais mais tradicionais de engenharia. O seu potencial de aplicação em novas áreas é muito elevado, nomeadamente em indústrias de ponta como a aeronáutica e aeroespacial. Ultimamente, impulsionadas pelas imensas aplicações possíveis, as técnicas utilizadas para obtenção de espumas metálicas têm sido melhoradas, tornando a sua fabricação mais rentável e em grande escala.

O projecto de uma estrutura recorrendo a estes materiais requer, entre outras coisas, um bom modelo matemático para prever a resposta da mesma. No entanto, não é possível encontrar na literatura soluções analíticas que permitam resolver na globalidade a maioria dos problemas com real interesse prático. Isto deve-se, em particular, à grande variabilidade de parâmetros envolvidos nestes materiais. Sendo assim, o primeiro objectivo deste trabalho é fazer um estudo comparativo de alguns dos modelos já existentes a fim de identificar as suas limitações. Em seguida, propõem-se um novo modelo, numa tentativa de colmatar algumas falhas constatadas nos modelos existentes.

Desta forma, no **primeiro capítulo**, é feito um enquadramento destes materiais, com uma breve apresentação dos processos de fabrico existentes para a sua obtenção, bem como dos métodos utilizados para união de peças executadas neste género de material. São ainda apresentados alguns exemplos de aplicação dos mesmos.

O **segundo capítulo** apresenta uma breve exposição dos ensaios e propriedades mecânicas. Tendo por base os modelos propostos por Ashby e Gibson, tenta-se explicar os mecanismos de deformação e cedência associados a este género de materiais.

No **terceiro capítulo**, expõe-se o método dos elementos finitos, essencial para compreender a implementação dos vários modelos de material utilizados.

No **quarto capítulo**, testa-se o modo como alguns modelos constitutivos já existentes, nomeadamente von Mises, Gurson e Cam Clay, descrevem um conjunto de problemas característicos para este tipo de materiais. Pretende-se, desta forma, avaliar as capacidades ou limitações inerentes a cada modelo.

O **quinto capítulo** descreve todos os passos necessários à implementação de um novo modelo constitutivo, neste caso, o de Deshpande, que depois é utilizado para resolver os mesmos problemas apresentados no quarto capítulo. Em seguida, faz-se uma comparação dos resultados obtidos.

Finalmente, no **sexto capítulo**, é proposto um novo modelo constitutivo para este tipo de materiais, em que se introduz o efeito de variação do coeficiente de Poisson. A introdução deste efeito prendeu-se com o facto de se constatar em todos os outros modelos a incapacidade de retratar devidamente o comportamento à compressão das espumas.

Neste trabalho constatou-se que os modelos seleccionados para modelar as espumas metálicas apresentam limitações significativas na sua aplicação. Uma das mais evidentes é a incapacidade de prever correctamente a expansão radial do material em estudo no domínio plástico. A implementação do modelo de Deshpande corrigiu esta deficiência, possibilitando a introdução do coeficiente de Poisson plástico que, de acordo com este modelo, é constante. Ainda assim, não prevê a variação do mesmo ao longo da deformação, facto que se verifica na realidade.

O modelo proposto, no qual se considera a variação do coeficiente de Poisson plástico, ajuda a resolver este problema, permitindo definir através de um conjunto de parâmetros a função que descreve a evolução deste parâmetro. A simulação numérica de vários exemplos, descritos nesta tese, permite constatar que a evolução da deformação é mais próxima da observada experimentalmente quando comparada com o modelo de Deshpande.

# Abstract

Metal foams are part of a new class of materials that stand apart from standard engineering materials because of its wide range of physical and mechanical properties. The possible applications for these materials are vast and continuously growing, as new manufacturing processes, cheaper and more effective, are being developed.

The design of a structure using this kind of materials requires, among other things, a proper mathematical model to simulate its behavior. However, there are no analytical solutions capable of solving the majority of problems with practical interest. This is mainly due to the wide variety of parameter involved in such problems. Therefore, the first objective of this thesis is to carry out a comparative study of some of the existing models in order to identify its limitations. Then, a new model is proposed, trying to minimize the pre identified limitations.

With this in mind, in the first chapter, an introduction to this material is made, presenting its main manufacturing processes as well as some existing joining techniques and applications.

In the second chapter, reference is made to the mechanical properties and some characterization methods of these materials. Based on the model presented by Ashby and Gibson (Gibson & Ashby, 1997), the deformation mechanisms involved in these materials are explained.

In the third chapter, a brief reference is made to the Finite Element Method in the solution of non linear analysis, essential to the understanding of this thesis.

In the fourth chapter, some typical problems are solved using existing constitutive models such as von Mises, Gurson and Cam Clay. The objective here is to identify the capabilities and limitations of each model.

In the fifth chapter, all the steps needed to implement a new constitutive model (in this case Deshpande's) are presented. Then, the same problems used in chapter four are solved and the results are compared to the ones obtained with the previous models.

Finally, in chapter six, a new constitutive model for this type of materials is presented. In this model, the variation of the plastic Poisson coefficient is introduced. The development of this new model is based on the fact that all the models previously tested had a limited capability of predicting the behavior of the material tested when subjected to an uniaxial compression.

In this thesis we demonstrated the limitations of the models selected to simulate metal foams. One of the most obvious is the incapacity to predict the radial expansion of the material in its plastic domain. The model presented by Deshpande (Deshpande & Fleck, 2000), corrected in part this problem, making it possible to introduce, as a constant in the yield surface, the plastic Poisson coefficient. Still, this model cannot account for the variation of this parameter.

The model developed and presented in this thesis considers the variation of the plastic Poisson through the use of some parameters that define a function for its variation. The numerical simulation of

the examples described in this thesis show that the deformation obtained with this model is closer to what is observed experimentally, when compared to the results obtained with the Deshpade's model.

# Introdução

Os materiais celulares são muito frequentes na natureza, como é o caso da cortiça, madeira, coral, ossos, etc., que desde sempre aproveitou esta configuração, que alia a elevada rigidez a uma densidade relativa baixa. No entanto, devido a dificuldades de fabrico e reprodutibilidade, só recentemente se começou a utilizar materiais celulares como “materiais de engenharia”. Estes são, por esta razão, parte de uma nova classe de materiais ainda pouco conhecida dos engenheiros. São obtidos por vários processos de fabrico que, embora ainda não estejam completamente controlados, têm vindo a sofrer evoluções no sentido de se melhorar a qualidade e reprodutibilidade das suas propriedades. Esta evolução deve-se em grande parte ao incentivo da indústria, que desde cedo se apercebeu do grande potencial de aplicação desta classe de materiais. A elevada relação rigidez – densidade, a capacidade de absorção de energia, a absorção de vibrações e o isolamento térmico, são algumas das propriedades que se destacam e são utilizadas para as mais diversas aplicações na indústria aeronáutica, aeroespacial e automóvel, entre outras. Embora o mercado para este tipo de materiais já seja bastante significativo, tem vindo a crescer rapidamente, devido à melhoria dos processos de fabrico bem como dos modelos de cálculo.

Estes materiais têm sido alvo de muita investigação e trabalho. No entanto, devido à grande dispersão de resultados experimentais e à diversidade de respostas dos mesmos aos diferentes tipos de solicitações existentes, o seu comportamento mecânico não se encontra ainda completamente caracterizado. Existe, por isso, uma grande quantidade de modelos matemáticos que pretendem descrever o seu comportamento, não havendo nenhum que consiga englobar todos os efeitos.

Devido às limitações de tempo inerentes a um trabalho deste género, nesta tese apenas se abordam espumas metálicas de alumínio. Embora o caso em estudo seja uma parte de um subdomínio de todas as espumas existentes, constata-se que, ainda assim, existe muita pesquisa por desenvolver.

# Agradecimentos

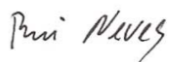
Gostaria de agradecer ao Professor Doutor Francisco Pires, orientador desta tese, por todo o apoio, dedicação e tempo dispendidos ao longo das várias etapas de elaboração da mesma. Agradeço ainda pela oportunidade que me foi dada para trabalhar nesta área que, embora complexa e trabalhosa, se tornou bastante interessante e desafiadora devido ao aparecimento constante de problemas que levam a novas áreas de conhecimento, em disciplinas bastante distintas e abrangentes.

Um obrigado muito especial ao meu colega e amigo Fábio, sempre presente, com uma palavra ou uma sugestão de apoio, companheiro de muitas horas de trabalho.

À Gabriela, agradeço pela compreensão e tolerância que manifestou nos momentos de maior ausência da minha parte.

Finalmente, aos pais, agradeço por tudo o que sou, e por tudo o que virei a fazer.

O Autor,



*“To myself I am only a child playing on the beach, while vast oceans of truth lie undiscovered before me.”*

*Isaac Newton*



# Conteúdos

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista de quadros

Nomenclatura

## Capítulo 1

<b>DESCRIÇÃO DO MATERIAL .....</b>	<b>1</b>
1.1 – Processos de fabrico.....	2
1.1.1 – Insuflação de ar através da liga metálica no estado líquido .....	2
1.1.2 – Utilização de um agente que promove a formação de espuma .....	3
1.1.3 – Consolidação de um pó metálico com um agente que promove a formação de espuma .....	4
1.1.4 – “Investment casting” .....	5
1.1.5 – Deposição na fase de vapor ou electrodeposição .....	6
1.2 – Processamento da espuma .....	7
1.3 – Comparação com material sólido .....	7
1.4 – Aplicações.....	9

## Capítulo 2

<b>CARACTERIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES MECÂNICAS DO MATERIAL.....</b>	<b>11</b>
2.1 – Efeito de tamanho.....	11
2.2 – Carregamento uniaxial .....	12
2.2.1 – Modelo de Ashby Gibson .....	16
2.3 – Carregamento multiaxial.....	23
2.4 – Anisotropia .....	23

## Capítulo 3

<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>25</b>
3.1 – Discretização do domínio .....	27
3.1.1 – Quadratura de Gauss .....	30

3.2 – Discretização do pseudo-tempo .....	31
3.2.1 – Método de Newton Raphson .....	33
3.3 – Modelos constitutivos .....	34
3.3.1 – Função de potencial plástico .....	35
3.3.2 – Critério de plasticidade, encruamento .....	36
3.3.3 – Discretização do modelo constitutivo .....	37
Capítulo 4	
<b>APLICAÇÃO DE ALGUNS MODELOS CONSTITUTIVOS .....</b>	<b>40</b>
4.1 – Exemplos estudados .....	41
4.1.1 – Simulação de tracção multiaxial com provete em borboleta .....	41
4.1.2 – Simulação da compressão uniaxial .....	42
4.1.3 – Simulação de indentação .....	44
4.2 – von Mises .....	45
4.2.1 – Tracção multiaxial com provete em borboleta .....	46
4.2.2 – Compressão uniaxial .....	47
4.2.3 – Indentação .....	49
4.3 – Gurson .....	50
4.3.1 – Tracção multiaxial com provete em borboleta .....	51
4.3.2 – Compressão uniaxial .....	52
4.3.3 – Indentação .....	53
4.4 – Cam Clay .....	54
4.4.1 – Tracção multiaxial com provete borboleta .....	58
4.4.2 – Compressão uniaxial .....	59
4.4.3 – Indentação .....	63
Capítulo 5	
<b>IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO CONSTITUTIVO DE DESHPANDE .....</b>	<b>66</b>
5.1 – Procedimento de actualização de estado .....	70
5.2 – Cálculo da matriz tangente consistente .....	78
5.3 – Validação .....	80
5.3.1 – Tracção multiaxial com provete em borboleta .....	81

5.3.2 – Compressão uniaxial .....	82
5.3.3 – Indentação .....	83
Capítulo 6	
<b>IMPLEMENTAÇÃO DE UM NOVO MODELO CONSTITUTIVO .....</b>	<b>86</b>
6.1 – Procedimento de actualização de estado .....	87
6.2 – Cálculo da matriz tangente consistente .....	94
6.3 – Validação .....	96
6.3.1 – Tracção multiaxial com provete borboleta .....	96
6.3.2 – Compressão uniaxial .....	96
6.3.3 – Indentação .....	98
Capítulo 7	
<b>SÍNTESE, CONCLUSÕES, SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>100</b>
7.1 – Síntese do trabalho desenvolvido .....	100
7.2 – Conclusões .....	100
7.3 – Sugestões para trabalhos futuros .....	102
Referências .....	103
Anexos .....	105
Anexo A – Método de Newton Raphson .....	105
Anexo B – Método de Backward Euler .....	108
Anexo C – Implementação da análise de problemas em Estado Plano de Tensão .....	109

# Lista de figuras

## Capítulo 1

Figura 1.1 – Variabilidade das propriedades das espumas metálicas, módulo de Young (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000) .....	1
Figura 1.2 – Estrutura celular aberta (a), fechada (b) .....	2
Figura 1.3 – Esquema do fabrico da espuma CYMAT (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000) .....	3
Figura 1.4 – Microestrutura da espuma CYMAT .....	3
Figura 1.5 – Esquema do fabrico da espuma Alporas (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000) .....	4
Figura 1.6 – Microestrutura espuma Alporas .....	4
Figura 1.7 – Esquema de fabrico da espuma Alulight (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000) .....	5
Figura 1.8 – Estrutura sanduíche com núcleo em espuma metálica – Alulight .....	5
Figura 1.9 – Esquema de fabrico da espuma Duocel .....	6
Figura 1.10 – Esquema de fabrico por Electrodeposição .....	6
Figura 1.11 – Aplicações espumas metálicas .....	10

## Capítulo 2

Figura 2.1 – Representação esquemática da curva tensão-deformação do ensaio de compressão uniaxial (Gibson & Ashby, 1997).....	12
Figura 2.2 – Representação gráfico carregamento e descarregamento (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000) .....	13
Figura 2.3 – Representação esquemática da curva tensão-deformação do ensaio de tracção uniaxial (Gibson & Ashby, 1997).....	14
Figura 2.4 – Células de Kelvin.....	15
Figura 2.5 – Unidade celular utilizada por Ashby e Gibson para modelar espumas com células abertas...16	
Figura 2.6 – Unidade celular utilizada por Ashby e Gibson para modelar espumas com células fechadas.19	
Figura 2.7 – Deformações das células à tracção, (Gibson & Ashby, 1997) .....	22

## Capítulo 3

Figura 3.1 - Representação gráfica das funções de forma para elemento de 4 nós.....	27
Figura 3.2 – Conversão das coordenadas locais, para coordenadas globais .....	31
Figura 3.3 – Representação da superfície de cedência de von Mises no espaço de Westergaard .....	36
Figura 3.4 – Representação encruamento isotrópico no modelo de von Mises .....	37
Figura 3.5 – Representação de encruamento cinemático no modelo de von Mises.....	37
Figura 3.6 – Representação de encruamento misto no modelo de von Mises .....	37
Figura 3.7 – Representação do efeito de Baushinger .....	37

## Capítulo 4

Figura 4.1 – Dispositivo para realização do ensaio de Arcan .....	41
Figura 4.2 – Geometria do provete em borboleta para ensaio de tracção multiaxial.....	41
Figura 4.3 – Nuvem de pontos experimentais e superfícies limite obtidas por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003).....	42
Figura 4.4 – Discretização da malha para o provete em borboleta .....	42
Figura 4.5 – Geometria provete de compressão.....	43
Figura 4.6 – Condições de fronteira da geometria utilizada na simulação numérica.....	43
Figura 4.7 – Discretização da geometria do provete de compressão .....	43
Figura 4.8 – Resultado esperado para o ensaio de compressão uniaxial .....	43
Figura 4.9 – Resultado de indentação de uma espuma metálica (Hanssen, Hopperstad, Langseth, & Ilstad, 2002) .....	44
Figura 4.10 – Geometria e condições de fronteira utilizadas para exemplo de indentação .....	44
Figura 4.11 – Discretização do provete para o exemplo de indentação.....	44
Figura 4.12 – Curva calibração von Mises .....	46
Figura 4.13 – Resultados numéricos von Mises, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática ..	47
Figura 4.14 – Resultados numéricos von Mises, referencial tensões principais.....	47
Figura 4.15 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de von Mises, baixas deformações.....	48
Figura 4.16 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de von Mises.....	48
Figura 4.17 – Gráfico de $\Delta R/R$ em função de $\epsilon_{yy}$ para o modelo de von Mises .....	48
Figura 4.18 – Evolução da deformada, modelo de von mises .....	48
Figura 4.19 – Deformada von Mises, factor de multiplicação 4 .....	49
Figura 4.20 – Deformação plástica, von Mises.....	49
Figura 4.21 – Deslocamento xx, von Mises .....	49
Figura 4.22 – Deslocamento yy, von Mises .....	49
Figura 4.23 – Curva de calibração do modelo de Gurson .....	51
Figura 4.24 – Resultados numéricos Gurson, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática.....	52
Figura 4.25 – Resultados numéricos Gurson, referencial tensões principais .....	52
Figura 4.26 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando o modelo de Gurson, baixas deformações .....	52
Figura 4.27 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando o modelo de Gurson .....	52
Figura 4.28 – Evolução da deformação e variável de dano, modelo de Gurson.....	53
Figura 4.29 – Gráfico de $\Delta R/R$ função de $\epsilon_{yy}$ para o modelo Gurson.....	53
Figura 4.30 – Deformada Gurson, factor de multiplicação 4 .....	54
Figura 4.31 – Deformação plástica acumulada, Gurson .....	54
Figura 4.32 – Deslocamento xx, Gurson.....	54
Figura 4.33 – Deslocamento yy, Gurson .....	54
Figura 4.34 – Superfície de cedência do modelo implementado no <i>Abaqus</i> .....	55
Figura 4.35 – Superfície de cedência de Cam Clay.....	56
Figura 4.36 – Curva de calibração para o modelo de Cam Clay .....	58
Figura 4.37 – Resultados numéricos Cam Clay, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática ...	58
Figura 4.38 – Resultados numéricos Cam Clay, referencial tensões principais .....	58
Figura 4.39 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay associativo, baixas deformações .....	59

Figura 4.40 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay associativo.....	59
Figura 4.41 – Gráfico de $\Delta R/R$ em função de $\epsilon_{yy}$ para o modelo de Cam Clay associativo.....	60
Figura 4.42 –Evolução da deformada, modelo de Cam Clay associativo .....	60
Figura 4.43 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay esférico, baixas deformações .....	61
Figura 4.44 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay esférico .....	61
Figura 4.45 – Gráfico de $\Delta R/R$ em função de $\epsilon_{yy}$ para o modelo de Cam Clay esférico.....	61
Figura 4.46 – Evolução da deformada, modelo de Cam Clay esférico .....	62
Figura 4.47 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay elíptico, baixas deformações .....	62
Figura 4.48 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay elíptico .....	62
Figura 4.49 – Gráfico de $\Delta R/R$ em função de $\epsilon_{yy}$ para o modelo de Cam Clay elíptico.....	63
Figura 4.50 – Evolução da deformada, modelo de Cam Clay elíptico .....	63
Figura 4.51 – Deformada Cam Clay Associativo, factor de multiplicação 4 .....	64
Figura 4.52 – Deformação plástica acumulada, fluxo associativo .....	64
Figura 4.53 – Deslocamento xx, fluxo associativo.....	64
Figura 4.54 – Deslocamento yy, fluxo associativo .....	64
Figura 4.55 – Deformada Cam Clay elíptico, factor de multiplicação 4 .....	65
Figura 4.56 – Deformação plástica acumulada, fluxo elíptico .....	65
Figura 4.57 – Deslocamento xx, fluxo elíptico .....	65
Figura 4.58 – Deslocamento yy, fluxo elíptico .....	65

## Capítulo 5

Figura 5.1 – Ensaio proposto por Deshpande (Deshpande & Fleck, 2000).....	67
Figura 5.2 – Resultados (Deshpande & Fleck, 2000) .....	67
Figura 5.3 – Superfície de Deshpande em função do parâmetro $\alpha$ .....	68
Figura 5.4 - Encruamento da superfície de Deshpande representado no referencial de Westergraad .....	68
Figura 5.5 – Solicitações para verificação de convergência local.....	80
Figura 5.6 – Curva calibração Deshpande .....	81
Figura 5.7 – Resultados numéricos Deshpande, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática ..	81
Figura 5.8 – Resultados numéricos Deshpande, referencial tensões principais.....	81
Figura 5.9 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Deshpande, baixas deformações.....	82
Figura 5.10 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Deshpande .....	82
Figura 5.11 – Evolução deformada, modelo Deshpande .....	82
Figura 5.12 – Gráfico de $\Delta R/R$ em função de $\epsilon_{yy}$ para o modelo de Deshpande .....	83
Figura 5.13 – Deformada Deshpande, factor multiplicação 4.....	83
Figura 5.14 – Deformação plástica acumulada, Deshpande .....	83
Figura 5.15 – Deslocamento xx, Deshpande .....	83
Figura 5.16 – Deslocamento yy, Deshpande .....	83
Figura 5.17 – Comparação vários modelos, baixas deformações .....	84
Figura 5.18 – Comparação vários modelos .....	84

## Capítulo 6

Figura 6.1 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo proposto, baixas deformações .....	97
Figura 6.2 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo proposto .....	97
Figura 6.3 – Gráfico de $\Delta R/R$ em função de $\epsilon_{yy}$ para o modelo proposto .....	97
Figura 6.4 – Evolução da deformada, modelo proposto.....	97
Figura 6.5 – Deformada modelo proposto.....	98
Figura 6.6 – Deformação plástica acumulada, modelo proposto .....	98
Figura 6.7 – Deslocamento xx, modelo proposto .....	98
Figura 6.8 – Deslocamento yy, modelo proposto .....	98
Figura 6.9 – Comparação da resposta entre Deshpande simples e modelo proposto .....	99

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Índices de material para projecto à rigidez máxima, com mínimo de massa .....	7
Tabela 2 – Índices de material para projecto à máxima resistência com mínima massa .....	8
Tabela 3 – Propriedades de algumas espumas de alumínio, (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000) .....	22
Tabela 4 – Propriedades obtidas utilizando o modelo de Ashby e Gibson.....	23
Tabela 5 – Propriedades utilizadas no modelo de von Mises .....	46
Tabela 6 – Propriedades utilizadas no modelo de Gurson.....	51
Tabela 7 – Convergência do algoritmo para resolução de problemas em estado plano de tensão.....	51
Tabela 8 – Propriedades a utilizadas no modelo Cam Clay.....	58
Tabela 9 – Propriedades utilizadas no modelo de Deshpande .....	81
Tabela 10 – Convergência global do novo modelo .....	96

## Lista de quadros

Quadro 1 – Algoritmo para discretização no pseudo-tempo.....	33
Quadro 2 – Algoritmo genérico para actualização de estado.....	39
Quadro 3 – Síntese do modelo de Deshpande.....	70
Quadro 4 – Funções de resíduo do modelo de Deshpande .....	72
Quadro 5 – Algoritmo para actualização de estado do modelo de Deshpande .....	76
Quadro 6 – Algoritmo para resolução do sistema de equações do modelo de Deshpande .....	77
Quadro 7 – Algoritmo para cálculo da matriz tangente de Deshpande .....	79
Quadro 8 – Síntese do novo modelo.....	87
Quadro 10 – Algoritmo para actualização de estado do novo modelo .....	92
Quadro 11 – Algoritmo para resolução do sistema de equações do novo modelo.....	93
Quadro 12 – Algoritmo para cálculo da matriz tangente do novo modelo .....	95



# Nomenclatura

$A$	Força termodinâmica associada à variável interna $\alpha$
$\alpha$	Variável interna do material
$b$	Tensor das forças por unidade de volume
$B$	Matriz das deformações
$D$	Variável de dano
$D_0$	Variável de dano inicial
$D$	Matriz de elasticidade
$e$	Deformação uniaxial real
$\epsilon^p$	Tensor das deformações plásticas
$\epsilon^e$	Tensor das deformações elásticas
$\epsilon$	Tensor das deformações
$\bar{\epsilon}_p$	Deformação plástica equivalente
$\epsilon_d$	Deformação de densificação
$\epsilon$	Deformação uniaxial
$E$	Módulo de Young
$\eta$	Tensor dos deslocamentos virtuais
$f^{int}$	Tensor das forças interiores
$f^{ext}$	Tensor das forças exteriores
$G$	Módulo de corte
$\gamma$	Multiplicador plástico
$I$	Tensor identidade de segunda ordem
$II$	Tensor identidade de quarta ordem
$II_d$	Tensor projector desviador
$J_2$	Segundo invariante do tensor das tensões desviadoras

$k$	Módulo de compressibilidade
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$m$	Massa
$n_{dim}$	Número de dimensões do problema
$n_{node}$	Número de nós por elemento
$n_{elem}$	Número de elementos
$n_{gaus}$	Número de pontos de Gauss
$n_{gausb}$	Número de pontos de Gauss para integração da superfície
$[\mathbf{N}]$	Matriz das funções de forma
$\mathbf{N}$	Tensor de fluxo plástico
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nu_p$	Coefficiente de Poisson Plástico
$\nu_0$	Coefficiente de Poisson plástico inicial
$p$	Pressão hidrostática
$p_c$	Pressão hidrostática de compressão de cedência
$p_t$	Pressão hidrostática de tensão de cedência
$\phi$	Função de cedência
$\psi$	Função de energia livre
$\Psi$	Função de potencial plástico
$q$	Tensão equivalente de von Mises
$\rho$	Densidade
$\mathbf{S}$	Tensor das tensões desviadoras
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das tensões de Cauchy
$\sigma_y$	Tensão limite elástica
$\sigma_{y_0}$	Tensão limite de cedência
$\sigma_c$	Tensão limite de compressão

$\sigma_t$	Tensão limite de tracção
$\sigma_{pl}^*$	“Plateu Stress”
$\mathbf{t}$	Tensor das forças de tracção na fronteira por unidade de área
$t$	Tempo
$\mathbf{u}$	Tensor de deslocamentos
$\mathfrak{K}$	Espaço dos deslocamentos admissíveis
$\mathfrak{E}$	Espaço dos deslocamentos virtuais admissíveis
$\nabla$	Operador gradiente
$(.)^*$	Propriedade referente à espuma metálica
$(.)^{(e)}$	Referente ao elemento
$[ ]^T$	Referente à transposta (matriz, vector)
$[ ]^{-1}$	Inversa de uma matriz
$( )^p$	Relativo a plástico
$( )^e$	Relativo a elástico
$^h( )$	Relativo ao domínio após discretização
$\partial(.)/\partial(.)$	Relativo a derivada parcial
$d(.) / d(.)$	Relativo a derivada total

#### Notação tensorial:

Escalares:	$a$ (letra minúscula)
Tensores de segunda ordem:	$\mathbf{A}$ (letra maiúscula a negrito e itálico)
Tensores de quarta ordem:	$\mathbf{A}$ (letra maiúscula a negrito)

## Capítulo 1

### Descrição do material

As espumas ou estruturas celulares podem ser feitas de praticamente qualquer tipo de material: metais, polímeros, cerâmicos e até compósitos. As suas propriedades dependem essencialmente de dois grupos de parâmetros: as propriedades associadas ao material do qual as células são feitas e os parâmetros que descrevem a estrutura geométrica da espuma (tamanho e forma das células, disposição do material entre faces e uniões das células, densidade relativa da estrutura, etc.). Conjugando todos estes parâmetros, é possível obter espumas com uma gama de propriedades bastante abrangente, Figura 1.1.

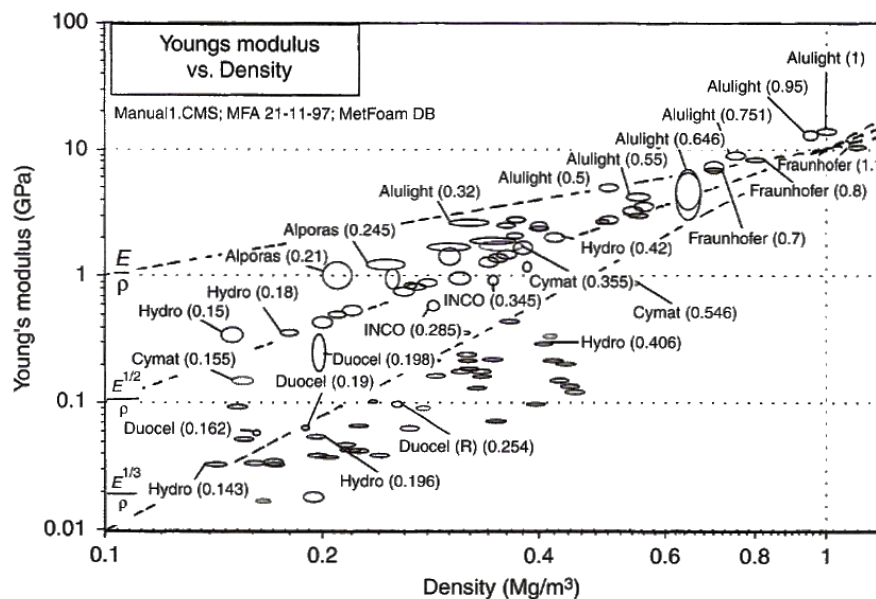


Figura 1.1 – Variabilidade das propriedades das espumas metálicas, módulo de Young (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)

Neste capítulo, pretende-se dar uma visão global sobre os tipos de espumas metálicas existentes, os seus processos de fabrico e construção e ainda as suas vantagens. Por último, são apresentadas algumas aplicações das mesmas.

## 1.1 – Processos de fabrico

Existem vários processos de fabrico distintos para a obtenção de espumas metálicas. No entanto, apenas alguns são suficientemente viáveis para ser implementados a nível industrial. O modo de obtenção de espumas metálicas divide-se em quatro classes, de acordo com a forma como estas são processadas:

- Espuma formada por deposição em fase de vapor;
- Espuma formada por electro-deposição;
- Espuma formada por processamento durante o estado líquido;
- Espuma formada a partir do estado sólido.

Actualmente os processos mais comuns são:

- Insuflação de ar através da liga metálica no estado líquido;
- Utilização de um agente que se decompõe libertando gás que promove a formação de espuma;
- Consolidação de um pó metálico com um agente que promove a formação de espuma, seguido de aquecimento para activar o agente;
- “Investment casting”;
- Deposição na fase de vapor ou electrodeposição de metal.

Cada um destes métodos é aplicável a um grupo específico de materiais, criando espumas com uma vasta gama de densidades relativas e tamanhos das células. De acordo com o processo de fabrico utilizado, obtêm-se espumas com células abertas ou células fechadas, Figura 1.2.

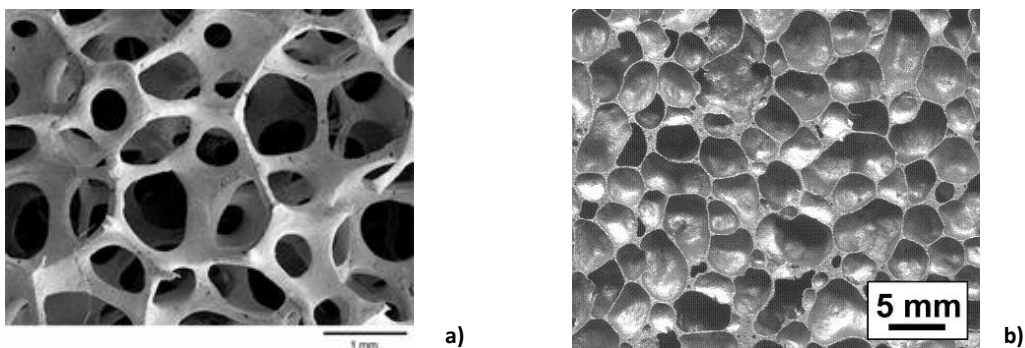


Figura 1.2 – Estrutura celular aberta (a), fechada (b) [3]

Em seguida faz-se uma breve descrição de cada um destes processos.

### 1.1.1 – Insuflação de ar através da liga metálica no estado líquido

A criação de espuma no caso de metais puros não é fácil, uma vez que a espuma resultante não é suficientemente estável e colapsa antes do metal solidificar. Para contrariar este efeito, são normalmente adicionadas pequenas partículas, tais como óxido de alumínio, que aumentam a viscosidade do metal e a estabilidade da espuma. Em seguida, é insuflado gás através do metal. Uma grande variedade de gases pode ser utilizada: ar, dióxido de carbono, oxigénio ou até mesmo água. As bolhas tendem a deslocar-se para a superfície, onde irão solidificar, dando origem à espuma metálica.

As características da espuma resultante são controladas através da injeção do ar, da temperatura, da velocidade de arrefecimento e da viscosidade do metal.

Esta técnica (Figura 1.3) é a utilizada no fabrico das espumas pela empresa CYMAT e possibilita a obtenção de blocos com dimensões até 2.44x1.22x0.42 metros e com células entre 5 a 20mm, Figura 1.4. Actualmente este processo é exclusivo para espumas de alumínio.

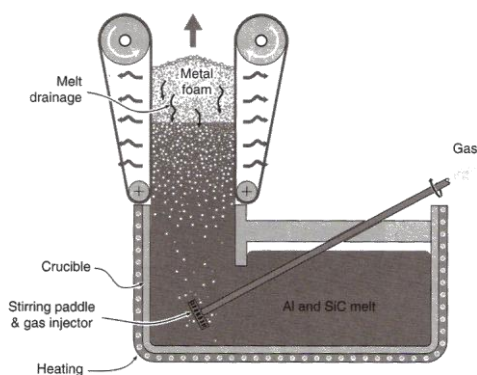


Figura 1.3 – Esquema do fabrico da espuma CYMAT (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)



Figura 1.4 – Microestrutura da espuma CYMAT [6]

### 1.1.2 – Utilização de um agente que promove a formação de espuma

Este processo é em tudo semelhante ao primeiro, com excepção de não ser insuflado um gás através do metal líquido. Neste caso, utiliza-se um agente, tal como o  $TiH_2$ , que, quando aquecido, se decompõe em  $Ti$  e  $H_2$ , libertando gás.

Enquanto o metal está no estado líquido, é adicionado cálcio de forma a aumentar a viscosidade. Em seguida é adicionado  $TiH_2$  em partículas de pequeno diâmetro que são misturadas no metal. Devido à libertação de gás, formam-se as bolhas que originam a espuma, Figura 1.5.

Este processo controla-se pela quantidade de agente utilizado, pelas condições de arrefecimento e pela pressão exterior.

É possível, com este procedimento, obter espumas de células fechadas, desde que a viscosidade seja suficientemente elevada para impedir a união das várias bolhas.

A espuma resultante apresenta células entre 0.5 a 5mm e densidades relativas de 0.2 a 0.07.

Actualmente este processo é unicamente utilizado para obtenção de espumas de alumínio, já que o agente utilizado se decompõe demasiado rápido às altas temperaturas de fusão de outros metais.

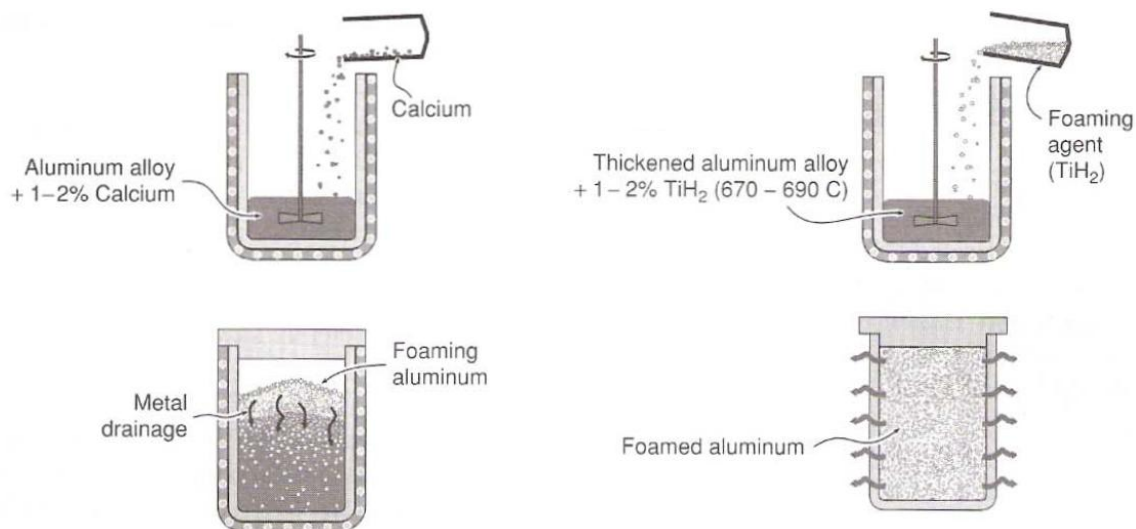


Figura 1.5 – Esquema do fabrico da espuma Alporas (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)

Este é o procedimento utilizado pela Shinko Wire Company para obtenção da espuma ALPORAS® (Figura 1.6) em blocos com dimensões de até 2.4x0.7x0.4 m.

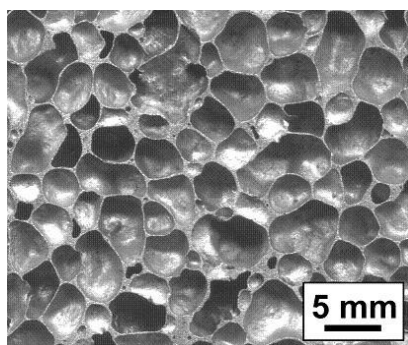


Figura 1.6 – Microestrutura espuma Alporas [3]

### 1.1.3 – Consolidação de um pó metálico com um agente que promove a formação de espuma

Neste processo, é feita uma mistura de um pó metálico com o agente de libertação de gás que, tal como no caso anterior, é o  $TiH_2$ . Em seguida, a mistura resultante é compactada e extrudada, dando origem a um sólido, o precursor, que é constituído por alumínio com partículas de  $TiH_2$  dispersas no seu interior. O precursor é então colocado dentro de um molde, onde é aquecido. O  $TiH_2$  começa a decompor-se, causando a libertação de gás que expande, formando a estrutura da espuma, Figura 1.7.

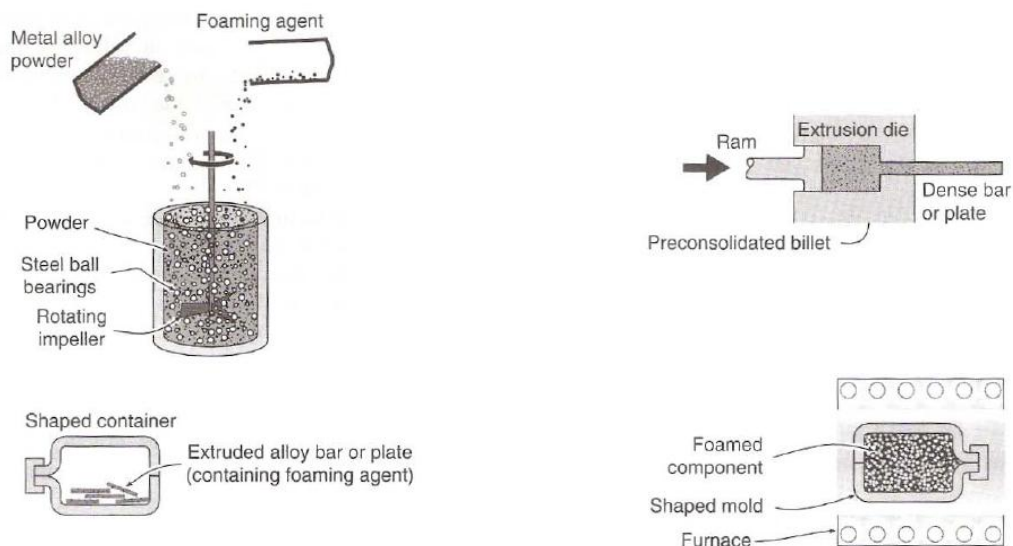


Figura 1.7 – Esquema de fabrico da espuma Alulight (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)

Uma variante desta técnica foi desenvolvida recentemente. O precursor é laminado entre duas faces metálicas, dando origem a uma estrutura sanduíche com núcleo sólido. O laminado pode ser em seguida trabalhado por embutidura ou outros processos de conformação para obtenção da forma desejada. Finalmente é aquecido e o precursor transforma-se em espuma, dando origem a uma estrutura sanduíche com núcleo em espuma metálica, Figura 1.8.

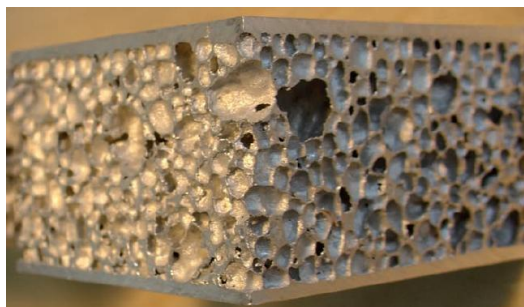


Figura 1.8 – Estrutura sanduíche com núcleo em espuma metálica – Alulight [1]

#### 1.1.4 – “Investment casting”

Neste processo, uma espuma de células abertas, à base de um material polimérico é utilizada como molde da espuma metálica que se deseja obter. O molde é revestido com uma barbotina cerâmica e em seguida pulverizado com partículas cerâmicas. Deste modo, obtém-se uma carapaça cerâmica que tem a forma do negativo da espuma que se pretende fazer. A carapaça cerâmica é depois sujeita a um ciclo térmico de cozedura durante o qual o material polimérico se decompõe deixando espaço vazio para o vazamento do metal. Após vazamento e arrefecimento do metal, a carapaça cerâmica é abatida, obtendo-se a espuma metálica, Figura 1.9.



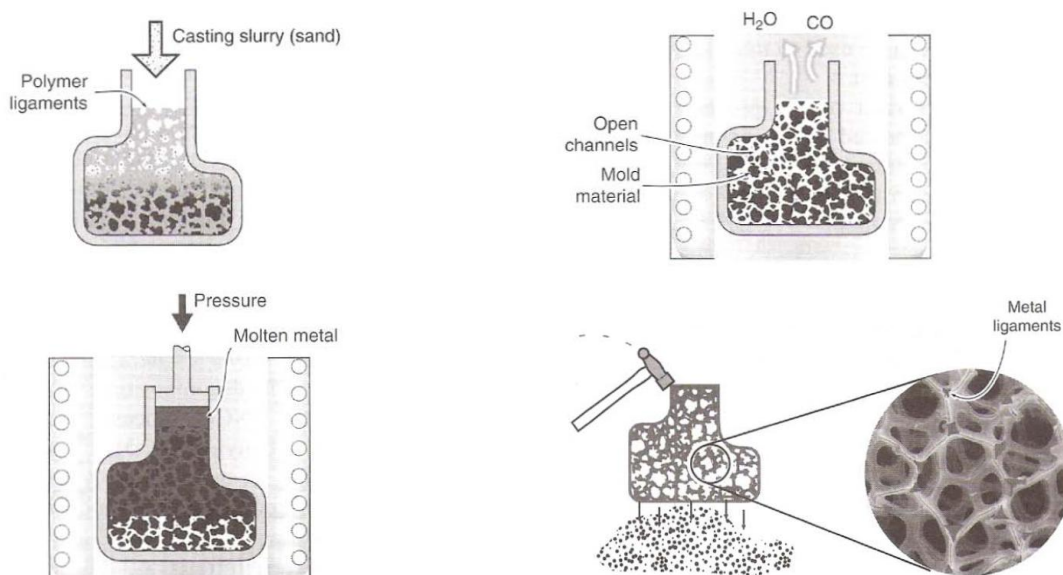


Figura 1.9 – Esquema de fabrico da espuma Duocel (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)

Este é o processo utilizado para obtenção das espumas DUOCEL®

Com esta técnica é possível obter espumas de alumínio, cobre, zinco, níquel, prata, ouro, etc, com as mais variadas formas.

### 1.1.5 – Deposição na fase de vapor ou electrodeposição

Neste processo, à semelhança do que acontece no método de “investment casting”, um modelo da espuma de material polimérico é utilizado como molde para a espuma metálica. No entanto, neste caso, o metal vai ser depositado directamente na espuma polimérica. Essa deposição é feita na fase de vapor, ou por electrodeposição. Em seguida o modelo em material polimérico é queimado, deixando unicamente a espuma metálica, Figura 1.10.

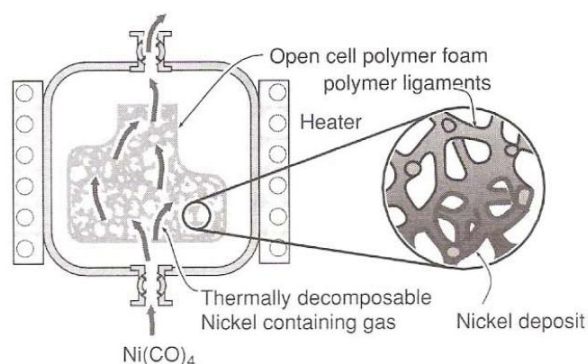


Figura 1.10 – Esquema de fabrico por Electrodeposição (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)

## 1.2 – Processamento da espuma

Devido às características particulares das espumas, os processos tradicionais de corte e maquinagem (corte por serra, fresagem, furação, etc.) não são apropriados, uma vez que causam distorções e deformações nas superfícies maquinadas. Esse efeito é tanto mais grave quanto mais baixa for a densidade das espumas.

Para obtenção de um corte preciso utiliza-se o processo de electroerosão. Também o corte por jacto de água ou por fresas de alta velocidade permitem a obtenção de boas superfícies de corte.

No caso da maquinagem de um provete para ensaios das características mecânicas, principalmente no caso de provetes de pequenas dimensões, deve-se usar a electroerosão, uma vez que é o método que causa menor quantidade de defeitos superficiais. Em provetes de maior dimensão, a qualidade da superfície tem menor influência no resultado, pelo que os outros métodos de corte poderão ser utilizados.

A qualidade superficial de uma espuma metálica é bastante baixa. A sua textura é irregular e as células são necessariamente abertas. Deste modo, a superfície é mais susceptível a dano local. Uma forma de melhorar as suas características é a colocação de uma face metálica, criando assim uma estrutura sanduíche. Outra alternativa é preencher a camada superficial com um polímero.

No que diz respeito à união das espumas metálicas, existem algumas possibilidades. No caso de se tratar de estruturas sanduíche com núcleo em espuma e faces metálicas, estas podem ser soldadas. As estruturas unicamente constituídas por espuma, devido à semelhança morfológica que as espumas metálicas têm com a madeira, podem ser unidas utilizando-se técnicas tradicionalmente usadas na madeira: parafusos, adesivos, insertos, etc.

## 1.3 – Comparação com material sólido

Pretende-se, através dos índices dos materiais propostos por Ashby, (Ashby M. , 2005), que se apresentam nas Tabela 1 e Tabela 2, fazer uma comparação das espumas metálicas com o mesmo material no estado sólido, de forma a encontrar aplicações em que a utilização de espumas seja vantajosa.

**Tabela 1 – Índices de material para projecto à rigidez máxima, com mínimo de massa**

<b>Tracção</b>	<b>Maximizar</b>
Área livre	$E/\rho$
<b>Torção</b>	
Forma fixa, área de secção arbitrária	$G^{1/2}/\rho$
Raio exterior fixo, espessura da parede livre	$G/\rho$
Espessura da parede fixa, raio exterior livre	$G^{1/3}/\rho$
<b>Vigas, placas (carregamento à flexão)</b>	
Forma fixa, área de secção livre	$E^{1/2}/\rho$
Altura fixa, largura livre	$E/\rho$
Largura fixa, altura livre	$E^{1/3}/\rho$

Tabela 2 – Índices de material para projecto à máxima resistência com mínima massa

<b>Tracção</b>	<b>Maximizar</b>
Área livre	$\sigma_y/\rho$
<b>Torção</b>	
Forma fixa, área de secção arbitrária	$\sigma_y^{2/3}/\rho$
Raio exterior fixo, espessura da parede livre	$\sigma_y/\rho$
Espessura da parede fixa, raio exterior livre	$\sigma_y^{1/2}/\rho$
<b>Vigas, placas (carregamento à flexão)</b>	
Forma fixa, área de secção livre	$\sigma_y^{2/3}/\rho$
Altura fixa, largura livre	$\sigma_y/\rho$
Largura fixa, altura livre	$\sigma_y^{1/2}/\rho$

Como se verá mais à frente nesta tese, Ashby e Gibson (Gibson & Ashby, 1997) propõe as seguintes relações aproximadas para as propriedades mecânicas das espumas:

$$\frac{E^*}{E} = C_1 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^2$$

$$\frac{G^*}{E} = C_2 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^2$$

$$\frac{\sigma_y^*}{\sigma_y} = C_3 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^{3/2}$$

Para verificar as solicitações em que se torna vantajosa a utilização de espumas comparativamente com o material sólido, parte-se destas relações para determinar a razão entre o índice do material sólido e o índice da espuma,  $\frac{(\cdot)}{(\cdot)^*}$ . Caso este valor seja superior à unidade, não se justifica a utilização de espuma.

Em seguida, a título de exemplo, apresenta-se o cálculo efectuado para o índice  $E/\rho$ , índice relacionado com o projecto à tracção, com maior razão rigidez/massa, sendo a área de secção um parâmetro livre.

$$E^* = C_1 E \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^2$$

$$E = \frac{E^*}{C_1} \left( \frac{\rho}{\rho^*} \right)^2$$

$$\frac{\frac{E}{\rho}}{\frac{E^*}{\rho^*}} = \frac{\frac{E^*}{C_1} \frac{\rho}{\rho^{*2}}}{C_1 E \frac{\rho^*}{\rho^2}} = \frac{E^*}{C_1 E} \frac{\rho^3}{\rho^{*3}}$$

Utilizando novamente a relação proposta por Ashby resulta:

$$\frac{\frac{E}{\rho}}{\frac{E^*}{\rho^*}} = \frac{C_1}{C_1^2} \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 \left( \frac{\rho^3}{\rho^{*3}} \right) = \frac{1}{C_1} \frac{\rho}{\rho^*}$$

De acordo com Gibson & Ashby,  $C_1 \approx 1$ . Desta forma, a razão entre os índices é superior a 1, pelo que se pode concluir que, no caso desta solicitação, a utilização de espumas metálicas não traz nenhum benefício a nível mecânico comparativamente com o metal sólido, antes pelo contrário.

Efectuando cálculos semelhantes para os restantes índices apresentados nas Tabela 1 e Tabela 2, verifica-se que a utilização de espumas metálicas apresentam valores superiores para os índices  $E^{1/3}/\rho$  e  $\sigma_y^{1/2}/\rho$ . O primeiro índice caracteriza a rigidez à flexão de vigas/placas com largura fixa e altura livre. Desta forma, comparando duas vigas/placa com a mesma rigidez, a viga/placa em espuma é mais leve. O segundo índice caracteriza a resistência à flexão. Ou seja, considerando duas vigas/placas com a mesma massa, a viga/placa em espuma é mais resistente.

Para além destas vantagens visíveis através dos índices, às espumas ainda se reconhece uma boa capacidade de absorção de energia durante a deformação, de absorção de vibrações e som, de isolamento térmico relativamente à sua inércia térmica e de isolamento magnético. Em seguida apresentam-se algumas aplicações onde se aproveita esta superioridade das espumas comparativamente com os outros materiais.

## 1.4 – Aplicações

Devido às propriedades únicas que estes materiais apresentam, a sua utilidade é muito variada nas mais diversas áreas.

Na área da aeronáutica e aeroespacial, um dos exemplos mais significativos em que se aproveitam as várias propriedades destes materiais é o caso de suporte para o combustível de foguetes, Figura 1.11 a). Neste caso, a espuma tem uma função estrutural, suportando o combustível e contribuindo para uma atenuação de vibrações e, simultaneamente, conduz eficazmente o calor promovendo uma melhor combustão. Também nos depósitos de nitrogénio líquido para utilização em câmaras de infravermelhos de aviões se utiliza este mesmo princípio, Figura 1.11 b). Desta vez, as propriedades de condução da espuma mantêm a temperatura aproximadamente constante em todo o depósito ao mesmo tempo que evitam a movimentação do líquido.

A grande capacidade de absorção de energia que estes materiais apresentam possibilita a aplicação dos mesmos em estruturas sujeitas a impactos. A sua utilização está a ser estudada pela indústria automóvel, para aplicação em chassis de automóveis mais leves, mais rígidos e com maior capacidade de absorver impactos comparativamente com os actuais (Figura 1.11 c, d). Também na indústria militar, a grande capacidade de absorção de energia está a ser utilizada para protecção de veículos e equipamentos contra projecteis e ondas de choque causadas por explosões (Figura 1.11 e).

Estes materiais encontram ainda aplicações em permutadores de calor (Figura 1.11 f), filtros, catalisadores, difusores de gases, corta chamas (Figura 1.11 g), suportes para absorção de vibrações (Figura 1.11 i), placas para utilização na construção civil, etc.

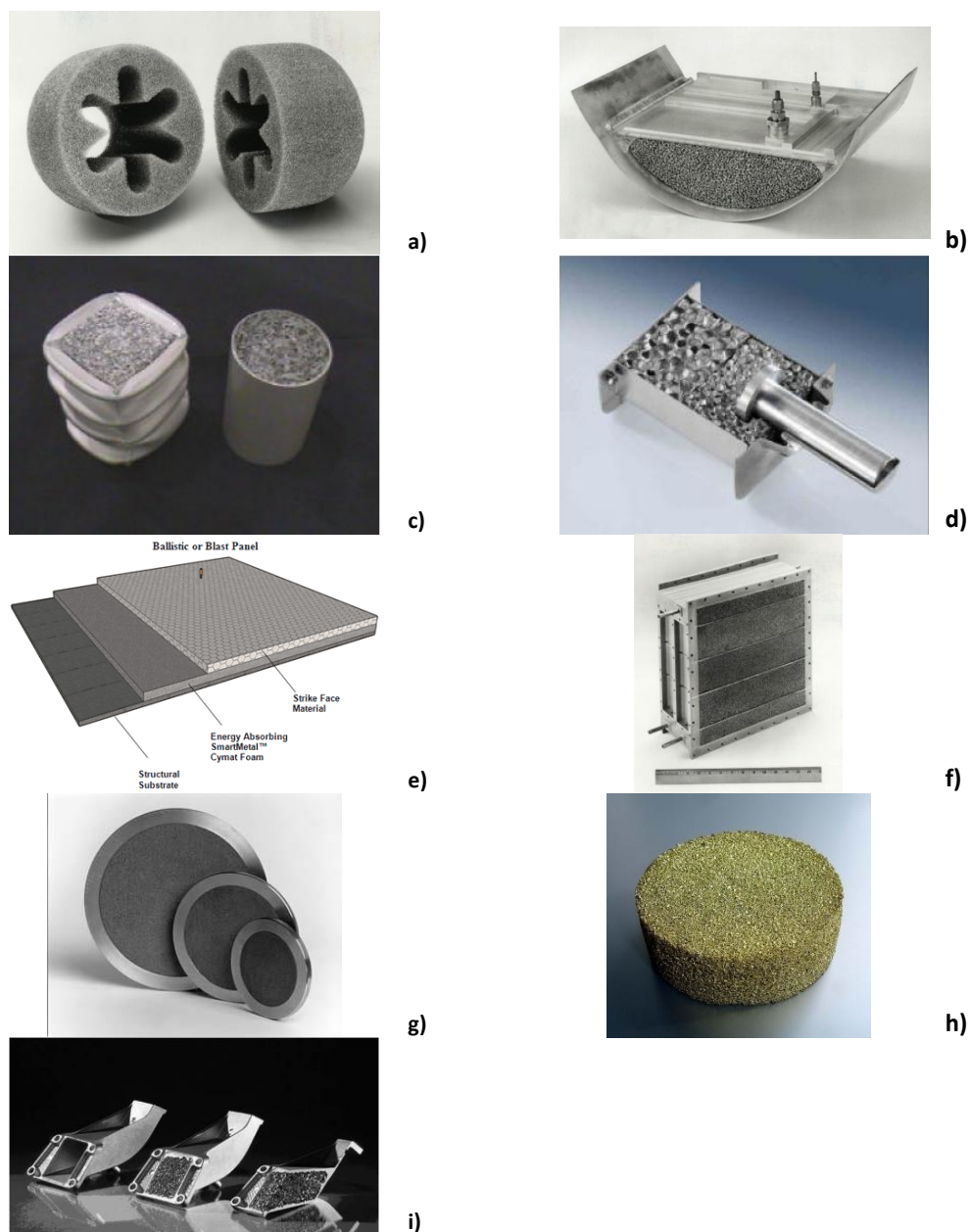


Figura 1.11 – Aplicações espumas metálicas [1],[3],[4],[5],[6]

## Capítulo 2

# Caracterização das propriedades mecânicas do material

Embora já tenha sido dedicado muito trabalho à compreensão e descrição do comportamento deste tipo de material, quer por via experimental, quer por via da micromecânica, ainda não existe uma relação matemática suficientemente sólida que relacione todas as variáveis. Uma causa para este facto é a grande dispersão existente nos resultados experimentais. Essa dispersão dificulta ou reduz bastante a aplicabilidade de algumas das relações empíricas entretanto estabelecidas tendo por base esses mesmos resultados. Pretende-se, assim, neste capítulo fazer uma breve exposição dos ensaios utilizados para determinação das propriedades mecânicas do material. São referidos alguns cuidados a ter nesses mesmos ensaios, de forma a obter resultados fiáveis. Seguidamente, os mecanismos de deformação das espumas são apresentados e descritos para as diversas solicitações. Para mais fácil compreensão do comportamento do material, os mecanismos de deformação serão, sempre que possível, quantificados, utilizando-se as relações empíricas propostas por Ashby e Gibson (Gibson & Ashby, 1997). Em seguida é feita uma comparação de alguns parâmetros obtidos por via desta relação e via experimental. Finalmente é feita uma breve referência à resposta a solicitações multiaxiais, bem como à anisotropia, que é bastante frequente nesta classe de materiais.

### 2.1 – Efeito de tamanho

Uma característica importante a ter em conta neste género de materiais é a dependência do tamanho da amostra na determinação das propriedades mecânicas. A rigidez e resistência aparentes dependem significativamente da relação entre o tamanho das células e o tamanho da amostra, do estado da superfície e do modo como as superfícies estão ligadas ou carregadas durante os ensaios.

No caso dos ensaios de tracção, compressão ou flexão, verifica-se que há uma diminuição dos módulos medidos com a diminuição do tamanho da amostra. A superfície de corte de uma espuma interrompe as ligações que antes existiam entre as células. Como tal, verifica-se a presença de uma banda de material à superfície mais enfraquecido relativamente ao resto da espuma. Este efeito é tanto mais evidente quanto menor for a amostra do material utilizado, já que a relação volume fragilizado – volume total é mais elevada.

Nos ensaios de corte, pode-se verificar o efeito contrário, em que com a diminuição da amostra de material se verifica o aumento do módulo de rigidez ao corte. Este efeito pode ser justificado pelo modo de fixação das superfícies às placas de aplicação de força. A fixação da espuma utilizando um adesivo corresponde ao encastramento das superfícies. Este tipo de fixação resulta numa banda de material mais

resistente ao corte comparativamente com o restante. Quanto menor for a amostra, maior é a contribuição desta zona de maior rigidez no comportamento global. Estes efeitos de forma nas propriedades do material são abordados mais aprofundadamente por Tekoğlu (Tekoğlu, 2007).

De forma a minimizar este efeito, as amostras a ensaiar devem ter dimensões sete vezes superiores ao tamanho da célula, no caso de ensaios de tracção e compressão, e três vezes superior, no caso de ensaios de corte (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000) Também a qualidade de superfície dos provetes influencia os resultados, pelo que se recomenda a utilização de provetes maquinados com as técnicas apresentadas no capítulo anterior.

Em seguida apresentam-se os vários ensaios e é feito um breve comentário de forma a clarificar o comportamento do material

## 2.2 – Carregamento uniaxial

### Compressão

O resultado típico de um ensaio de compressão uniaxial é demonstrado na figura seguinte.

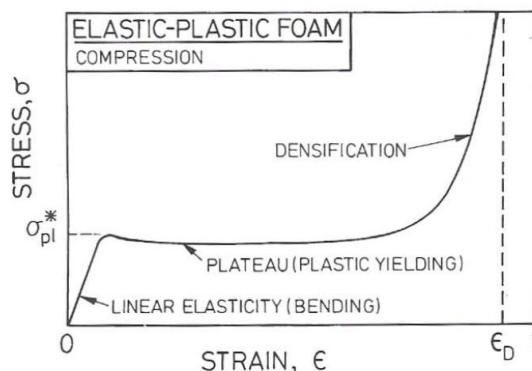


Figura 2.1 – Representação esquemática da curva tensão-deformação do ensaio de compressão uniaxial (Gibson & Ashby, 1997)

Esta curva apresenta o aspecto característico dos ensaios uniaxiais de compressão de materiais celulares, onde são bem distintas três fases.

Numa **primeira fase**, o material deforma-se quase exclusivamente de maneira elástica e apresenta uma evolução praticamente linear das tensões com as deformações. O mecanismo de deformação da espuma depende ligeiramente da topologia das células. Para espumas de baixa densidade e células abertas, esta deformação elástica deve-se principalmente à flexão das uniões celulares. À medida que a densidade aumenta, a contribuição da extensão ou compressão das uniões celulares torna-se cada vez mais significativa. No caso das células fechadas, o material na união das células dobra e estende e as membranas que constituem as paredes celulares são traccionadas ou comprimidas, aumentando a rigidez devido à contribuição das paredes. No caso de não haver rotura das membranas celulares, a compressão do ar aprisionado no seu interior também contribui para um aumento da rigidez, efeito mais óbvio em materiais poliméricos.

A resistência à compressão de uma espuma corresponde ao pico inicial de tensão no caso de tal existir. Se se verificar o contrário, assume-se que é a intercepção das duas pseudo-rectas (a correspondente ao carregamento inicial e a correspondente à tensão de colapso do material 'plateau stress').

A **segunda fase** caracteriza-se por um patamar de tensão praticamente constante. Esta zona corresponde ao colapso das células. O mecanismo de colapso depende do material base da espuma, podendo ser um colapso frágil ou plástico. O colapso das células dá-se quando a tensão excede um determinado valor e ocorre num plano perpendicular à direcção de carregamento. A zona de colapso vai-se propagando através do material à medida que a deformação aumenta. O colapso plástico em espumas elasto-plásticas resulta numa evolução quase horizontal na curva do ensaio tensão – deformação. Esta é uma das características principais dos materiais celulares, que é bastante aproveitada no caso de elementos para absorção de energia.

A **última fase** da curva do ensaio de compressão está relacionada com a densificação do material. À medida que a deformação aumenta, as células das paredes aproximam-se e entram em contacto, o que leva a um rápido aumento das tensões com as deformações.

Os dados experimentais revelam que o declive inicial da curva tensão-deformação é menor do que o verificado no caso de descarregamento, Figura 2.2. Medições das deformações na superfície indicam que existe deformação plástica para tensões inferiores à resistência à compressão da amostra, o que se traduz numa diminuição da rigidez. Deste modo, a obtenção do módulo de Young deve ser efectuada no descarregamento do provete, (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000).

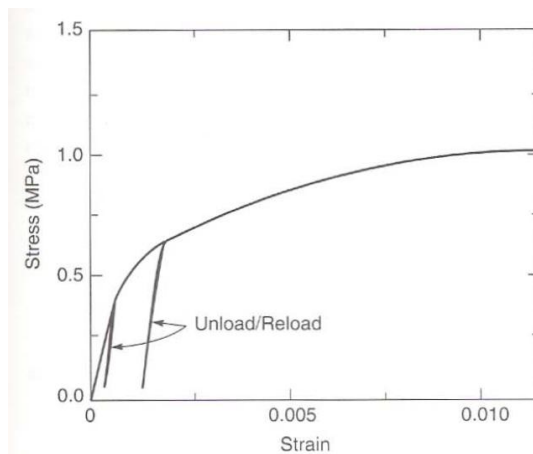


Figura 2.2 – Representação gráfica carregamento e descarregamento (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)

O atrito entre as placas de carregamento e a superfície da espuma causa deformações localizadas e consequentemente valores de resistência à compressão inferiores. Como tal, deve ser feita uma lubrificação ou utilizar-se superfícies com baixos coeficientes de atrito.



## Tracção

O resultado típico de um ensaio de tracção é representado na Figura 2.3

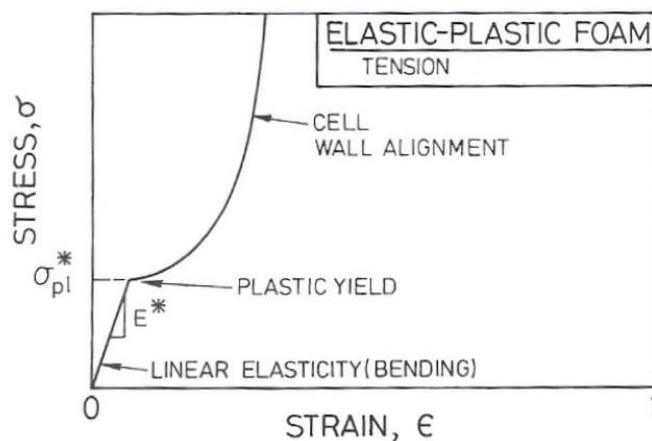


Figura 2.3 – Representação esquemática da curva tensão-deformação do ensaio de tracção uniaxial (Gibson & Ashby, 1997)

A resposta a uma solicitação de tracção é inicialmente linear elástica, devido à flexão das paredes das células, mecanismo igual ao verificado em compressão. Em materiais muito dúcteis, à medida que a deformação aumenta, as paredes das células sofrem rotações no sentido de se alinharem com a direcção de aplicação da tensão. Estas rotações provocam um aumento na rigidez da espuma até ao momento em que se verifica a rotura. Nas espumas de alumínio não é este o caso. À tracção apresentam geralmente uma rotura frágil, não evidenciando praticamente nenhuma deformação plástica. As deformações à cedência são normalmente baixas, 0.2 a 2%.

Pelos mesmos motivos referidos anteriormente, no caso de compressão uniaxial, o módulo de Young é retirado da porção da curva em descarregamento.

Tal como é evidente na Figura 2.1 e Figura 2.3, quer à tracção, quer à compressão, as espumas apresentam uma zona que se pode considerar linear elástica, em que as tensões evoluem linearmente com as deformações. Também as tensões limites em ambas as solicitações costumam ser semelhantes, sendo no entanto frequente uma tensão limite à tracção superior à compressão.

Numa tentativa de determinar expressões matemáticas que relacionam as propriedades elásticas com os parâmetros do material (densidade relativa, módulo de Young do material denso, geometria das células, etc), vários autores utilizaram diferentes abordagens para este problema.

A abordagem mais simples foi a proposta por (Gibson & Ashby, 1997), que apenas considera os mecanismos de deformação das espumas. A relação com os parâmetros geométricos da espuma é estabelecida por meio de constantes a determinar em ensaios experimentais.

Outros autores utilizaram métodos mais sofisticados, como a discretização e subsequente análise, pelo método dos elementos finitos, da microestrutura de um volume representativo de material celular. A microestrutura utilizada pode ser obtida por métodos matemáticos, tais como o de Voronoi (Li, Gao,

& Subhash, 2006), (Gan, Chen, & Shen, 2005) e (Tekoğlu, 2007)) ou de Laguerre (Kanaun & Tkachenko, 2006), ou por métodos gráficos, utilizando, por exemplo, tomografia computadorizada (Wicklein & Thoma, 2005). Estes métodos pretendem descrever uma estrutura celular com irregularidades devido à distribuição da localização e tamanho das células. Neles ainda se considera a presença de defeitos, tais como a curvatura das paredes celulares ou a inexistência das mesmas.

K. Li (Li, Gao, & Subhash, 2006) faz uma comparação entre os resultados obtidos com o modelo de Voronoi e os resultados obtidos utilizando uma estrutura perfeitamente ordenada constituída por células de Kelvin - células tetradecaédricas, com seis faces quadradas e oito faces hexagonais, Figura 2.4. Estas células têm a particularidade de encaixarem perfeitamente umas nas outras e minimizarem a energia de superfície. Esta consideração está de acordo com a realidade das espumas, em que a nucleação e crescimento dos poros se faz de modo a minimizar as energias de interface. Os resultados obtidos revelam que a introdução de defeitos, como a variação da geometria das células, aumenta a rigidez enquanto diminui o coeficiente de Poisson. Ficou ainda evidente que a rigidez diminui com a introdução de uma distribuição aleatória das áreas de secção das ligações celulares. No entanto, esta alteração não resultou em variações no coeficiente de Poisson. Também se concluiu que a forma da secção considerada influencia significativamente os resultados obtidos.

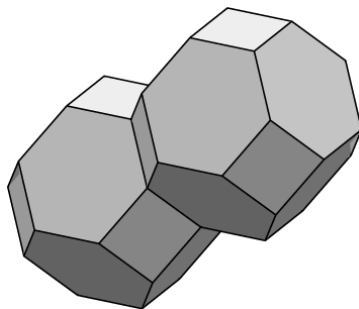


Figura 2.4 – Células de Kelvin

Y.X. Gan (Gan, Chen, & Shen, 2005), por sua vez, estudou o efeito de imperfeições causadas pela inexistência de ligações celulares. Concluiu que a rigidez diminui com o aumento das imperfeições. Essa diminuição é mais acentuada para espumas de menor densidade relativa.

S Kanaun (Kanaun & Tkachenko, 2006) utilizou o modelo de Laguerre para estudar o efeito da distribuição do tamanho das células na resposta do material. Concluiu que, para materiais com uma grande variação na distribuição dos tamanhos celulares, a rigidez é inferior comparativamente com uma estrutura com células de tamanhos iguais.

Embora estes resultados sejam de grande interesse para a melhor compreensão da influência dos parâmetros celulares no comportamento global do material, a discretização da geometria de um volume representativo e o ensaio posterior por elementos finitos são problemas bastante complexos e de grande carga computacional que se tornam pouco viáveis na prática. Para além do mais, os resultados não permitem estabelecer relações suficientemente sólidas entre os diferentes parâmetros de modo a serem aplicadas a todos os outros casos de materiais celulares.

Há ainda vários autores que propõem expressões empíricas tendo por base aproximações a resultados experimentais (Hanssen, Hopperstad, Langseth, & Ilstad, 2002).

Estas relações empíricas estão associadas a erros, devido às simplificações consideradas e também à grande dispersão dos resultados experimentais em que se baseiam, e a sua aplicabilidade é praticamente limitada à espuma que foi ensaiada.

No que diz respeito ao comportamento plástico (colapso plástico das células e densificação), as relações existentes são ainda mais escassas, reduzindo-se quase exclusivamente a fórmulas empíricas obtidas por aproximações a resultados experimentais.

### 2.2.1 – Modelo de Ashby Gibson

Em seguida descreve-se brevemente a abordagem de Ashby e Gibson (Gibson & Ashby, 1997) para este problema. Tal como mencionado anteriormente, esta é uma simplificação bastante redutora que despreza muitos parâmetros da espuma. No entanto, permite uma fácil compreensão dos mecanismos de deformação envolvidos, motivo pela qual é aqui referida.

#### 2.2.1.1 – Compressão

##### *Células abertas*

As relações de Ashby e Gibson foram obtidas modelando a espuma como sendo um conjunto de células cúbicas, cada uma constituída por doze “vigas” de secção  $t$  e comprimento  $l$ . As células adjacentes estão posicionadas de forma a que as “vigas” se encontrem a meio vão, Figura 2.5. O comportamento da espuma é então obtido pelas leis básicas da mecânica clássica para vigas.

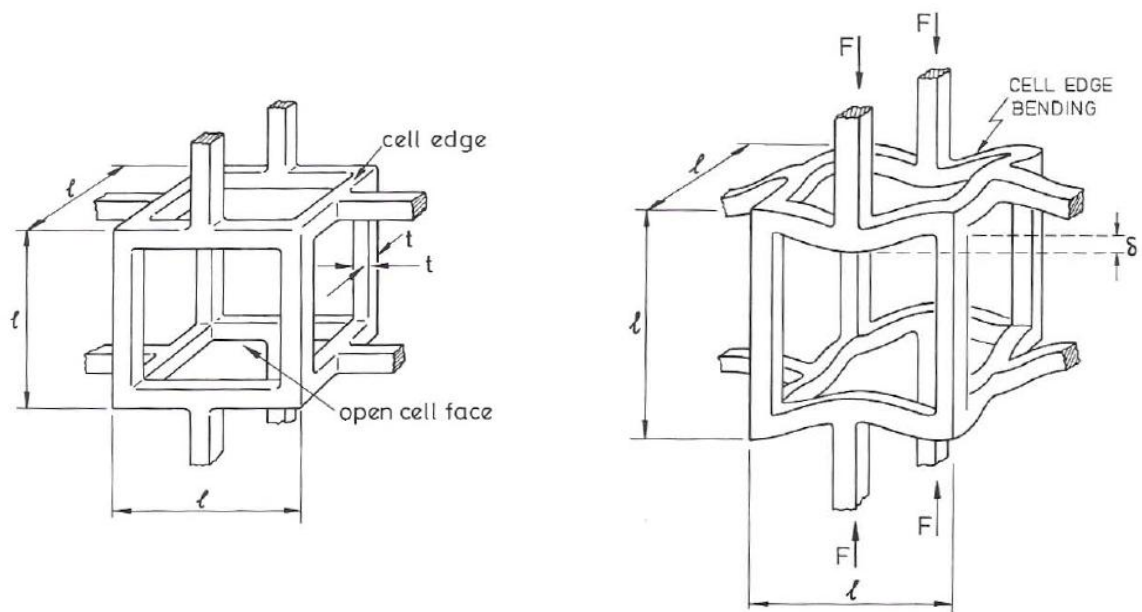


Figura 2.5 – Unidade celular utilizada por Ashby e Gibson para modelar espumas com células abertas

Na realidade, as geometrias das espumas são muito mais complexas do que a sugerida. No entanto, o modo como o material se comporta rege-se pelos mesmos princípios. A relação com a geometria é estabelecida por meio de uma constante.

#### *Elasticidade linear*

A densidade da célula e o momento de inércia de cada “viga” podem ser relacionados com as dimensões  $t$  e  $l$  por:

$$\frac{\rho^*}{\rho} \propto \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad (2.1)$$

$$I \propto t^4 \quad (2.2)$$

O módulo de Young da estrutura é calculado pela deformação elástica sofrida pelo elemento quando sujeito a uma carga. Pela teoria clássica das vigas obtém-se que:

$$\delta \propto \frac{Fl^3}{EI} \quad (2.3)$$

Como a força está relacionada com a tensão por:

$$F \propto \sigma l^2 \quad (2.4)$$

E a deformação é dada por:

$$\varepsilon \propto \frac{\delta}{l} \quad (2.5)$$

Resulta que:

$$E^* = \frac{C_1 E_s I}{l^4} \quad (2.6)$$

Utilizando as relações geométricas, obtém-se:

$$\frac{E^*}{E} = C_1 \left(\frac{\rho^*}{\rho}\right)^2 \quad (2.7)$$

$C_1$  é a constante de proporcionalidade que estabelece a relação com a geometria das células.

O módulo de Young obtido por esta analogia é válido para pequenas deformações. À medida que as deformações elásticas aumentam, surgem momentos flectores adicionais nas “colunas” verticais. Em compressão, esta interacção entre viga e coluna diminui o módulo, em tensão, aumenta. Assim, a parte que se designa de linear elástica é, na verdade, ligeiramente não linear.

O módulo de corte é obtido utilizando um raciocínio semelhante, originando:

$$G^* = \frac{C_2 E I}{L^4} \quad (2.8)$$

$$\frac{G^*}{E} = C_2 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 \quad (2.9)$$

Tendo por base os resultados obtidos experimentalmente para uma grande variedade de espumas de diversos materiais, os parâmetros  $C_1$  e  $C_2$ , que melhor aproximam as expressões aos resultados experimentais, são respectivamente 1 e 3/8.

### *Colapso plástico*

O colapso plástico ocorre quando o momento resultante da força  $F$  excede o momento de cedência plástica das uniões celulares.

Para o caso de uma viga com secção quadrangular de lado  $t$  esse momento é:

$$M_p = \frac{1}{4} \sigma_y t^3 \quad (2.10)$$

No caso de a carga ser normal às “vigas” o momento de flexão máximo é proporcional a  $Fl$ .

A tensão na espuma é dada, como anteriormente, por  $\sigma \propto F/l^2$ .

Combinando estas equações resulta

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_y} = C_5 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^{3/2} \quad (2.11)$$

$C_5$  é uma constante que serve para relacionar a expressão com a geometria das várias espumas.

Para espumas de densidades relativas mais elevadas, Gibson e Ashby propõem um parâmetro de correcção que tem em conta o efeito dos cantos das células no comprimento das ligações celulares. O resultado é:

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_y} = C'_5 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^{3/2} \left( 1 + \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^{1/2} \right) \quad (2.12)$$

Ainda assim, esta aproximação está limitada para casos em que  $\frac{\rho^*}{\rho} < 0.3$ . Para densidades relativas superiores a este valor, a aproximação feita ao comportamento de vigas deixa de ser válida, uma vez que as ligações entre as células apresentam uma relação  $\frac{t}{l}$  muito elevada. Nesse caso, o principal mecanismo de deformação não é a flexão, mas sim a compressão.

Novamente, fazendo uma comparação com os resultados experimentais, os parâmetros que melhor caracterizam o material são:

$$C_5 = 0.3, C'_5 = 0.23$$

### Densificação

Para grandes deformações, as paredes das células entram em contacto umas com as outras. Desta forma, o declive da curva tensão/deformação cresce rapidamente, aproximando-se do módulo do material no caso não celular. A deformação a partir da qual se verifica esta evolução é dada por:

$$\varepsilon_D = 1 - 1.4 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right) \quad (2.13)$$

Esta relação foi obtida experimentalmente.

### Células fechadas

As espumas com células fechadas são de análise mais complicada. Quando são obtidas a partir do estado líquido, como muitas vezes acontece, a tensão superficial nas faces das células pode levar o material a concentrar-se nas uniões celulares, resultando em células fechadas mas com paredes bastante finas. Como consequência, o comportamento é bastante semelhante às espumas de células abertas, já que a contribuição da rigidez das paredes celulares é baixa. No entanto, esta situação nem sempre se verifica. Casos há em que as paredes celulares têm espessura considerável e, como tal, os modelos para cálculo dos parâmetros da espuma diferem ligeiramente dos apresentados anteriormente para o caso das espumas com células abertas. Para obter as relações, Ashby e Gibson utilizaram um elemento celular, conforme se representa na Figura 2.6.

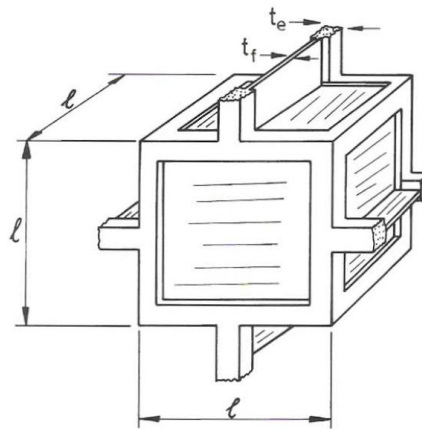


Figura 2.6 – Unidade celular utilizada por Ashby e Gibson para modelar espumas com células fechadas

### Elasticidade linear

De acordo com (Gibson & Ashby, 1997) o módulo de Young é o resultado de 3 contribuições:

- A flexão das zonas de união das células, cujo cálculo é efectuado da mesma forma demonstrada anteriormente;
- As tensões de membrana nas paredes celulares, de tracção e compressão;
- A compressão do fluido que se encontra nas células

Resulta assim que:

$$\frac{E^*}{E} = C_1 \phi^2 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 + C'_1 (1 - \phi) \frac{\rho^*}{\rho_s} + \frac{p_0 (1 - 2\nu^*)}{E \left( 1 - \frac{\rho^*}{\rho_s} \right)} \quad (2.14)$$

O modelo aqui apresentado para descrever a contribuição da compressão do fluido foi deduzido a partir da equação dos gases perfeitos, como tal, não traduz o caso em que o fluido é incompressível.

$\phi$  é a fracção de sólido que se encontra na zona de união das células, de espessura  $t_e$

$(1 - \phi)$  é a fracção de sólido que se encontra nas faces das células, de espessura  $t_f$

$\phi$  é dado em função de  $\frac{t_f}{l}$  e  $\frac{t_e}{l}$ , que por sua vez são função da densidade relativa, de acordo com as expressões apresentadas abaixo:

$$\phi = \frac{t_e^2}{t_e^2 - \frac{Z_f}{\bar{n}} t_f l} \quad (2.15)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1.2 \left( \frac{t_e^2}{l^2} + 0.7 \frac{t_f}{l} \right) \quad (2.16)$$

$$\frac{t_f}{l} = 0.93 \phi^{1/2} \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

$\bar{n}$  é o número médio de lados por face, numa única célula;

$f$  é o número de faces de uma célula;

$Z_f$  é o número de faces que se encontram nas extremidades da célula.

Para o caso em que  $\phi = 1$ , obtém-se a expressão utilizada para espumas com células abertas e, como tal,  $C_1 = 1$

Quando  $\phi = 0$ , espera-se uma relação do tipo  $\frac{E^*}{E} = \frac{\rho^*}{\rho}$ . Assim resulta que  $C'_1 \approx 1$ .

O módulo de corte é dado, a partir de considerações similares por:

$$\frac{G^*}{E} = C_2 \phi^2 \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right)^2 + C'_2 (1 - \phi) \frac{\rho^*}{\rho} \quad (2.18)$$

Mais uma vez, a melhor aproximação obtida para esta expressão é obtida para  $C_2 = C'_2 = 3/8$

### *Colapso plástico*

Partindo das mesmas considerações, Ashby e Gibson propuseram a seguinte fórmula para cálculo do colapso plástico:

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_y} = C_5 \left( \phi \frac{\rho^*}{\rho} \right)^{3/2} + C'_5 (1 - \phi) \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right) \quad (2.19)$$

Quando  $\phi = 1$ , a expressão deve ser equivalente à utilizada no caso de espumas com células abertas, como tal,  $C_5 = 1$ .

Para  $\phi = 0$ ,  $\sigma_{pl}^* = \sigma_y$  quando  $\frac{\rho^*}{\rho} = 1$ , logo,  $C'_5 = 1$

Considerando o efeito da compressão do gás existente entre as células, obtém-se:

$$\frac{\sigma_{pl}^*}{\sigma_y} = 0.3 \left( \phi \frac{\rho^*}{\rho} \right)^{3/2} + (1 - \phi) \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right) + \frac{p_0 - p_{at}}{\sigma_y} \quad (2.20)$$

### *Densificação*

A deformação limite de densificação é dada pela mesma fórmula utilizada no caso das espumas com células abertas.

#### **2.2.1.2 - Tracção**

### *Elasticidade Linear*

O módulo de elasticidade para pequenas deformações de uma espuma em tensão é igual ao caso de compressão.

Os módulos de elasticidade são dados respectivamente pelas equações (2.8),(2.9), para o caso de espumas de células abertas, e (2.14), (2.18) para espumas de células fechadas.

### *Colapso plástico*

Uma espuma metálica cede à tensão devido ao mesmo mecanismo e praticamente à mesma tensão do caso de compressão. O comportamento após cedência é que é significativamente diferente.



No caso de espumas com grande ductilidade, durante a extensão, a rotação das paredes das células reduz o momento flector e a extensão posterior é causada quase exclusivamente pela extensão das uniões celulares.

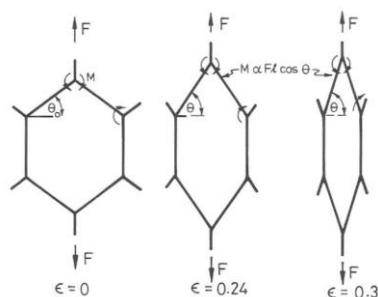


Figura 2.7 – Deformações das células à tracção, (Gibson & Ashby, 1997)

A tensão aumenta neste intervalo desde o valor  $\sigma_{pl}^*$ , calculado previamente (2.11),(2.20), até ao valor

$$\frac{\sigma_A^*}{\sigma_y} \approx \frac{\rho^*}{\rho} \quad (2.21)$$

No caso de espumas frágeis, este comportamento não se verifica. A rotura dá-se logo após atingir a tensão limite. Neste caso não há encruamento.

### 2.2.1.3 - Comparação com os resultados experimentais

Nesta secção apresentam-se algumas propriedades mecânicas das espumas comerciais mais comuns e em seguida, dentro do possível, esses mesmos valores são comparados com os propostos pelas relações de Ashby e Gibson.

Tabela 3 – Propriedades de algumas espumas de alumínio, (Ashby, Evans, Fleck, Gibson, Hutchinson, & Wadley, 2000)

	Alulight	Alporas	ERG
Densidade Relativa	0.1-0.35	0.08-0.1	0.05-0.1
Estrutura Celular	Células fechadas	Células Fechadas	Células Abertas
Modulo Young (GPa)	1.7-12	0.4-1.0	0.06-0.3
Módulo de Corte (GPa)	0.6-5.2	0.3-0.35	0.02-0.1
Coeficiente Poisson	0.31-0.34	0.31-0.34	0.31-0.34
Tensão de cedência compressão (MPa)	1.9-14.0	1.3-1.7	0.9-3.0
Tensão de cedência tracção (MPa)	2.2-30	1.6-1.9	0.9-3.5
Deformação de densificação	0.4-0.8	0.7-0.8	0.8-0.9
Deformação à rotura de tracção	0.002-0.04	0.01-0.06	0.1-0.2

A Tabela 4 apresenta os valores obtidos com as relações matemáticas propostas por Ashby e Gibson, calculados para os limites superiores e inferiores da densidade relativa de cada espuma.

Uma vez que a rigidez do material depende da densidade relativa, aumentando com o aumento da mesma, assume-se nesta comparação que o valor mínimo apresentado na tabela corresponde à menor densidade. O oposto é considerado para os valores máximos.

**Tabela 4 – Propriedades obtidas utilizando o modelo de Ashby e Gibson**

	Alulight	Alporas	ERG
Densidade Relativa	0.1-0.35	0.08-0.1	0.05-0.1
Estrutura Celular	Células Fechadas	Células Fechadas	Células Abertas
Módulo Young (GPa)	2.46-10.58	1.93-2.46	0.18-0.7
Módulo de Corte (GPa)	* <sup>1</sup>	* <sup>1</sup>	0.018-0.08

Como é visível pelos resultados acima apresentados, há uma grande diferença entre os resultados reais e os obtidos utilizando esta aproximação empírica, verificando-se erros bastante grosseiros na previsão das propriedades elásticas (erros relativos até 382%)

## 2.3 – Carregamento multiaxial

Em grande parte das aplicações mecânicas que utilizam este género de material não basta considerar o comportamento a uma solicitação uniaxial. Verifica-se que, devido à interacção das tensões, a resistência do material apresenta uma grande variabilidade em função do estado de tensão.

Como se mostrou anteriormente, no caso uniaxial, o principal mecanismo de deformação, e, conseqüentemente, de cedência é a flexão das paredes celulares. No entanto, no caso multiaxial, tal nem sempre se verifica uma vez que, com a variação do estado de tensão, o momento flector em cada parede celular pode ser anulado. Deste modo, as previsões para o comportamento descritas anteriormente não são aplicáveis.

Uma forma de descrever o comportamento no caso multiaxial é através de modelos constitutivos do material, normalmente compostos por uma superfície que descreve a cedência e uma lei de encruamento. Para determinação das superfícies de cedência no caso das solicitações multiaxiais, é normalmente efectuado um conjunto de ensaios que percorrem vários estados de tensão numa tentativa de obter uma expressão analítica aproximada. No capítulo seguinte é feita uma exposição mais detalhada de modelos constitutivos bem como a sua implementação num código de elementos finitos.

## 2.4 – Anisotropia

Muitas das estruturas celulares existentes, sejam elas de origem natural (ossos, madeira, etc.) ou humana (espumas) apresentam anisotropia. Nas estruturas de origem natural, a anisotropia é essencialmente motivada pela melhoria das propriedades numa determinada direcção preferencial. Já no caso das espumas, a anisotropia é muitas vezes o resultado indesejado do processo de fabrico utilizado. Por exemplo, no caso das espumas obtidas com insuflação de ar ou com a utilização de um agente que liberta gás, as células resultantes tendem a ter uma forma alongada numa determinada

\*<sup>1</sup> Parâmetro não calculado por não ser conhecido o valor de  $\phi$

direcção (direcção da força gravítica durante o processo de fabrico), apresentando assim alguma anisotropia.

A anisotropia dos materiais celulares é o resultado de duas causas distintas: anisotropia da estrutura celular e anisotropia do material das paredes celulares. No caso das espumas metálicas, a anisotropia do material é desprezável, resultando apenas os efeitos da estrutura.

Por se encontrar fora do âmbito desta tese, não é feita uma abordagem pormenorizada dos modelos matemáticos que descrevem este género de materiais. Alguns modelos existem para abordar este problema, nomeadamente o de Tagarielli (Tagarielli, Deshpande, Fleck, & Chen, 2005).

## Capítulo 3

# Método dos elementos finitos

Neste capítulo apresenta-se um breve historial do método dos elementos finitos bem como os princípios básicos da teoria subjacente. Simultaneamente descrevem-se alguns dos métodos numéricos utilizados para sua implementação. Pretende-se assim elucidar alguns aspectos elementares, necessários para a compreensão da implementação computacional deste método na resolução de problemas não lineares.

Este método surgiu nos anos sessenta, como resposta à necessidade crescente de resolver problemas cada vez mais complexos, essencialmente na área da aeronáutica e da engenharia civil. Anteriormente, estes problemas implicavam a resolução directa de um sistema de equações diferenciais que os descreviam. Esta resolução era muitas vezes obtida por meio das séries de Fourier. No entanto, este método é bastante complexo, moroso e unicamente aplicável a problemas com geometrias relativamente simples.

O método dos elementos finitos foi revolucionário uma vez que, devido à discretização do espaço de integração, a resolução dos problemas era independente da sua geometria. Esta característica permite uma implementação computacional, que possibilita a rápida resolução de problemas geometricamente muito distintos, sem que para isso seja necessário resolver novo sistema de equações diferenciais.

Devido ao crescimento contínuo das capacidades computacionais, este método generalizou-se e encontrou aplicações nas mais diversas áreas (problemas de análise estática ou dinâmica, transferência de calor, electromagnetismo, problemas lineares, não lineares, etc.). Nesta tese, no entanto, é abordada unicamente a utilização deste método para problemas de análise estática, lineares e não lineares.

Convém, antes de mais, salientar as fontes de não linearidade. Num problema linear elástico, um incremento de força  $\delta F$  corresponde sempre a um incremento de deslocamento  $\delta x$ , havendo uma proporcionalidade entre ambos. Um problema não linear apresenta uma relação não proporcional entre forças e deslocamentos, ou tensões e deformações. A não linearidade pode ter origem no material ou na geometria. Relativamente ao material, é fácil perceber o motivo de não linearidade tendo por base um simples ensaio de tracção a um aço. Verifica-se que quando o material entra em regime plástico, o comportamento é não linear, ao contrário do que acontece no regime elástico. Esta não linearidade vai-se estender a todo o problema. Num caso mais geral, um material pode ter sempre um comportamento não linear, mesmo na zona elástica.

A não linearidade geométrica é causada por instabilidades geométricas do problema. Um exemplo é uma viga à compressão. A carga evolui proporcionalmente à deformação até ao momento em que se atinge o seu valor crítico. Nessa altura, devido ao fenómeno de encurvadura, a deformação aumenta muito mais rapidamente para um pequeno incremento de carga.

Existem várias formulações para o método dos elementos finitos, em função da variável que se define como incógnita, podendo esta ser os deslocamentos, as tensões, etc. A formulação mais utilizada é a dos deslocamentos, pela sua simplicidade e menor custo computacional, pelo que é a única abordada nesta tese.

A resolução deste problema consiste em achar um deslocamento admissível,  $\mathbf{u} \in \mathfrak{K}$ , de forma a resolver a seguinte equação, dada pelo teorema dos trabalhos virtuais:

$$\int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}(t) : \nabla \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b}(t) \cdot \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(t) \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{U} \quad (3.1)$$

Nesta  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{t}$  são respectivamente a força por unidade de volume e forças de tracção na fronteira por unidade de área e  $\boldsymbol{\eta}$  é o campo de deslocamentos virtuais. Por sua vez,  $\mathfrak{K}$  corresponde ao espaço dos deslocamentos admissíveis e  $\mathfrak{U}$  ao espaço dos deslocamentos virtuais admissíveis.

Na equação (3.1), a incógnita é o tensor das tensões,  $\boldsymbol{\sigma}$ , que por sua vez é função dos deslocamentos,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ .

Nesta equação, o primeiro termo corresponde à energia de deformação, o segundo ao trabalho das forças de volume, e o terceiro ao trabalho das forças de superfície.

Uma vez que a resolução analítica desta equação não é exequível na maioria dos casos com interesse prático, recorre-se ao método dos elementos finitos que utiliza técnicas numéricas para a resolução da mesma, fazendo para isso duas discretizações:

- Discretização do domínio;
- Discretização do pseudo-tempo.

Com estas duas discretizações, o problema a resolver transforma-se de um problema contínuo para um problema discreto, no domínio de integração e no tempo de integração. Desta forma, em cada incremento de pseudo-tempo resolve-se o sistema de equações algébricas resultante da discretização do domínio. Cada uma destas discretizações é explicada mais detalhadamente em seguida.

### 3.1 – Discretização do domínio

Esta discretização consiste numa aproximação aos domínios do corpo e das funções a ele associadas. Ambos são substituídos por um subdomínio discreto, obtido por uma discretização por elementos finitos do domínio  $\Omega$ .

$$\Omega \rightarrow {}^h\Omega$$

$$\mathfrak{K} \rightarrow {}^h\mathfrak{K}$$

$$\mathfrak{E} \rightarrow {}^h\mathfrak{E}$$

Em que  ${}^h(\cdot)$  é referente ao domínio do corpo após discretização.

Cada elemento passa a ter associado a cada nó uma função de interpolação. Considerando um elemento com  $n_{node}$  nós, a função de interpolação tem de ser igual a 1 para o nó a que está associada, e zero nos restantes. Para além disso, a soma das funções de forma em qualquer ponto deve ser 1, ou seja:

$$N_i^{(e)}(x_i) = 1 \quad (3.2)$$

$$N_i^{(e)}(x_j) = 0, \quad i \neq j \quad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i^{(e)} = 1 \quad (3.4)$$

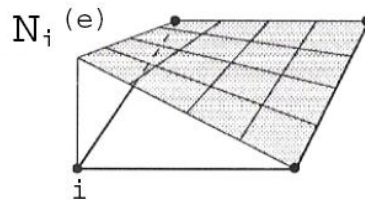


Figura 3.1 - Representação gráfica das funções de forma para elemento de 4 nós

Desta forma, qualquer função  $a$  no domínio  $\Omega^{(e)}$  - domínio do elemento - pode ser dada pela interpolação dos valores dos nós do respectivo elemento:

$${}^h a(x) = \sum_{i=1}^n a_i N_i(x) \quad (3.5)$$

O valor de  $a$ , em todo o domínio  ${}^h\Omega$ , é então dado por:

$${}^h a(x) = \sum_{i=1}^{n_{poin}} a_i N_i^g(x) \quad (3.6)$$

O operador  $N_i^g$  corresponde à função de interpolação global correspondente ao nó  $i$ .  $n_{poin}$  é o número total de nós na estrutura considerada.

Aplicando a mesma aproximação, para os deslocamentos e deslocamentos virtuais, obtemos:

$${}^h u(x) = \sum_{i=1}^{n_{poin}} u_i N_i^g(x) \quad (3.7)$$

$${}^h \eta(x) = \sum_{i=1}^{n_{poin}} \eta_i N_i^g(x) \quad (3.8)$$

Utilizando notação matricial, num problema com  $n_{dim}$  dimensões, a matriz de interpolação global pode ser dada por:

$$[N]^g(x) = [N_1(x)I_{n_{dim}} \quad N_2(x)I_{n_{dim}} \quad \cdots \quad N_{n_{poin}}(x)I_{n_{dim}}] \quad (3.9)$$

$I_{n_{dim}}$  é o tensor identidade de segunda ordem, com dimensão  $n_{dim}$ .

O vector global de deslocamentos pode ser definido (Souza Neto, Owen, & Perić, 2008) como:

$$\mathbf{u} = [u_1^1 \quad \dots \quad u_{n_{dim}}^1, \quad u_1^2 \quad \dots \quad u_{n_{dim}}^2, \quad u_1^{n_{poin}} \quad \dots \quad u_{n_{dim}}^{n_{poin}}]^T \quad (3.10)$$

De forma similar pode ser definido o vector global dos deslocamentos virtuais:

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1^1 \quad \dots \quad \eta_{n_{dim}}^1, \quad \eta_1^2 \quad \dots \quad \eta_{n_{dim}}^2, \quad \eta_1^{n_{poin}} \quad \dots \quad \eta_{n_{dim}}^{n_{poin}}]^T \quad (3.11)$$

Tendo por base estas considerações, o deslocamento e o deslocamento virtual em qualquer ponto do domínio aproximado são dados por (3.12) e (3.13), respectivamente.

$${}^h \mathbf{u} = [N]^g \mathbf{u} \quad (3.12)$$

$${}^h \boldsymbol{\eta} = [N]^g \boldsymbol{\eta} \quad (3.13)$$

Finalmente, define-se a matriz das deformações que, para o caso bidimensional, em problemas de estado plano de tensão ou deformação, apresenta a seguinte estrutura:

$$\mathbf{B}^g = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^g}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_{n_{poin}}^g}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^g}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2^g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_{n_{poin}}^g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1^g}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1^g}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2^g}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2^g}{\partial x_1} & \frac{\partial N_{n_{poin}}^g}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{n_{poin}}^g}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Esta matriz corresponde ao operador gradiente,  $\nabla$ . Substituindo as expressões anteriores na equação (3.1), obtém-se:

$$\int_{h_\Omega} [\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}^g \boldsymbol{\eta} - \mathbf{b} [\mathbf{N}]^g \boldsymbol{\eta}] dv - \int_{\partial h_\Omega} \mathbf{t} [\mathbf{N}]^g \boldsymbol{\eta} da = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathfrak{E} \quad (3.15)$$

que corresponde a:

$$\left\{ \int_{h_\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}^g - \mathbf{b} [\mathbf{N}]^g dv - \int_{\partial h_\Omega} \mathbf{t} [\mathbf{N}]^g da \right\} \boldsymbol{\eta} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in {}^h\mathfrak{E} \quad (3.16)$$

Uma vez que a equação (3.16) tem de ser válida para qualquer combinação de deslocamentos virtuais, o termo  $\boldsymbol{\eta}$  é diferente de zero, pelo que pode sair da equação, resultando (3.17).

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Com:

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) = \int_{h_\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B}^g dv \quad (3.18)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \int_{h_\Omega} \mathbf{b} [\mathbf{N}]^g dv + \int_{\partial h_\Omega} \mathbf{t} [\mathbf{N}]^g da \quad (3.19)$$

Na verdade, no método dos elementos finitos, as funções de interpolação globais não chegam a ser calculadas. Todos os cálculos são efectuados no domínio do elemento  $\Omega^{(e)}$ , (3.20) e (3.21), e depois assemblados nos respectivos vectores/matrizes globais. Como será comprovado mais à frente, para resolver a equação (3.17) será necessário determinar a matriz de rigidez global do problema. Para isso é necessário conhecer a matriz tangente  $\mathbf{D}$ . Ora, essa matriz varia de ponto para ponto, de acordo com o historial de tensões nesse mesmo ponto, motivo pelo qual tem de ser calculada localmente. Desta forma não há necessidade de calcular as funções de interpolação globais.

$$\mathbf{f}_{(e)}^{int}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega^{(e)}} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{B} dv \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}_{(e)}^{ext} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{b} [\mathbf{N}] dv + \int_{\partial \Omega^{(e)}} \mathbf{t} [\mathbf{N}] da \quad (3.21)$$

Novamente, para o caso de estado plano de tensão ou deformação:

$$[\mathbf{N}](x) = [N_1(x)\mathbf{I}_{n_{dim}} \quad N_2(x)\mathbf{I}_{n_{dim}} \quad \cdots \quad N_{n_{node}}(x)\mathbf{I}_{n_{dim}}] \quad (3.22)$$



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_{nnode}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_{nnode}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_{nnode}}{\partial x_2} & \frac{\partial N_{nnode}}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Finalmente as forças internas e externas são dadas por:

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{u}) = \text{Assemb}_{e=1}^{e=n_{elem}} [\mathbf{f}_{(e)}^{int}] \quad (3.24)$$

$$\mathbf{f}^{ext} = \text{Assemb}_{e=1}^{e=n_{elem}} [\mathbf{f}_{(e)}^{ext}] \quad (3.25)$$

Por fim, para a integração das equações (3.20) e (3.21) utiliza-se o método numérico da quadratura de Gauss, método esse que será explicitado em seguida.

### 3.1.1 – Quadratura de Gauss

Este é um método numérico utilizado para resolução de integrais, que permite obter resultados exactos na integração de funções polinomiais. Para as restantes funções, o resultado é aproximado. No entanto, e tendo em conta que as funções de forma são normalmente polinomiais, as funções a integrar também o serão. Deste modo, este método é uma boa solução, motivo pelo qual é tão amplamente utilizado em códigos de elementos finitos.

De uma forma aproximada, o integral de uma qualquer função genérica  $f(\xi)$  ao longo do  $\Gamma$  é dado por

$$\int_{\Gamma} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^{n_{gaus}} w_i f(\xi_i) \quad (3.26)$$

em que  $\xi_i$  e  $w_i$  correspondem respectivamente às coordenadas e pesos dos  $n_{gaus}$  pontos de Gauss.

Através de uma mudança de coordenadas do sistema local para o sistema global obtém-se

$$\int_{\Omega(e)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n_{gaus}} w_i f(\mathbf{x}_i) \det(Jac) \quad (3.27)$$

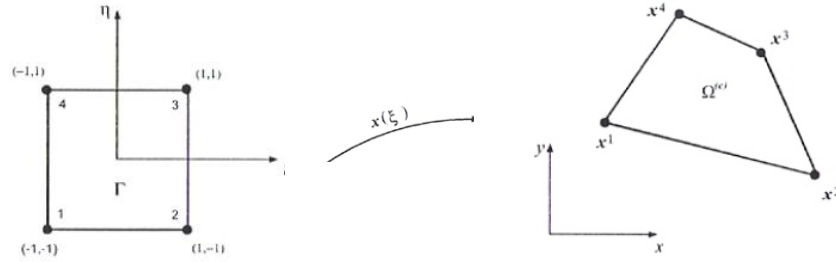


Figura 3.2 – Conversão das coordenadas locais, para coordenadas globais

A matriz Jacobiana é a matriz de transformação dada por:

$$Jac = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right] \quad (3.28)$$

Esta técnica é utilizada para calcular quer os integrais de volume quer os integrais de superfície necessários no método dos elementos finitos. Neste ultimo caso utilizam-se  $n_{gausb}$  pontos de Gauss para integração numérica.

Considerando uma relação linear entre tensões e deslocamentos dada por

$$\sigma = D^e B u \quad (3.29)$$

Resulta, das equações (3.20) e (3.21):

$$\mathbf{f}_{(e)}^{int}(u) = \int_{h\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B} dv \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n_{gaus}} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{D}_i^{(e)} \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) w_i \det(Jac) \mathbf{u} = \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{u} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{(e)}^{ext} &= \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{b} [\mathbf{N}] dv + \int_{\partial\Omega^{(e)}} \mathbf{t} [\mathbf{N}] da \\ &= \sum_{i=1}^{n_{gaus}} \mathbf{b}(\mathbf{x}_i) [\mathbf{N}](\mathbf{x}_i) w_i \det(Jac) + \sum_{i=1}^{n_{gausb}} \mathbf{t}(\mathbf{x}_i) [\mathbf{N}](\mathbf{x}_i) w_i \det(Jac) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Como se constata, a implementação deste método numérico é bastante robusto devido à facilidade de transição do referencial local para o referencial global. Desta forma, as posições dos pontos de Gauss e respectivos pesos serão sempre iguais para todos os elementos, independentemente das suas coordenadas nodais no referencial global.

### 3.2 – Discretização do pseudo-tempo

No caso de materiais que apresentem um comportamento dependente da história de carregamento, como por exemplo um material elastoplástico, não chega conhecer a deformação num determinado instante. A tensão deixa de ser exclusivamente função das deformações e passa a depender também de um conjunto de variáveis internas no instante imediatamente anterior. É então necessário utilizar

técnicas capazes de ultrapassar esta situação. Um dos métodos usados é a discretização no pseudo-tempo.

$$\sigma_{n+1} = \check{\sigma}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (3.32)$$

$$\alpha_{n+1} = \check{\alpha}(\alpha_n, \varepsilon_{n+1}) \quad (3.33)$$

O problema consiste, então, em resolver a equação:

$$\int_{\Omega} [\sigma(\alpha, u_{n+1}) : \nabla \eta - b(u_{n+1}) \cdot \eta] dv - \int_{\partial\Omega} t(u_{n+1}) \cdot \eta da = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{E} \quad (3.34)$$

Após discretização semelhante à demonstrada anteriormente obtém-se:

$$f_{n+1}^{int} - f_{n+1}^{ext} = 0 \quad (3.35)$$

Com:

$$f^{int}(u) = \int_{h\Omega} \sigma^T(\alpha_n, u_{n+1}) B^g dv \quad (3.36)$$

$$f^{ext} = \int_{h\Omega} b_{n+1} [N]^g dv + \int_{\partial h\Omega} t_{n+1} [N]^g da \quad (3.37)$$

Considera-se, por simplicidade, um carregamento proporcional:

$$b_{n+1} = \lambda_{n+1} \bar{b} \quad (3.38)$$

$$t_{n+1} = \lambda_{n+1} \bar{t} \quad (3.39)$$

O que resulta em:

$$f_{n+1}^{ext} = \lambda_{n+1} \bar{f}^{ext} \quad (3.40)$$

$\bar{f}^{ext}$  é calculado apenas uma vez no início do problema. Desta forma, para efectuar a análise do mesmo, é definido um pseudo-tempo, ao longo do qual se vão incrementando as forças exteriores. Em cada instante do pseudo-tempo resolve-se a equação (3.35), sendo para isso necessário conhecer o estado anterior.

Como se pode compreender observando a equação (3.36), a equação (3.35) é não linear, com a fonte de não linearidade a ser a função que descreve  $\sigma_{n+1}$ , função essa que depende do tipo de material em análise. Mais à frente este tema é novamente abordado de forma mais aprofundada ao tratar dos modelos constitutivos de materiais.

Devido à não linearidade da equação, esta tem de ser resolvida utilizando métodos numéricos. Um método bastante popular é o de Newton Raphson, uma vez que permite uma convergência quadrática e é de simples implementação e grande robustez. O anexo A apresenta uma descrição mais detalhada do mesmo. Em seguida, demonstra-se a aplicação deste método à resolução da equação (3.35).

### 3.2.1 – Método de Newton Raphson

A implementação do método de Newton Raphson apresenta-se seguidamente sobre a forma de algoritmo.

**Quadro 1 – Algoritmo para discretização no pseudo-tempo**

Para cada instante de pseudo-tempo (n+1) pretende-se resolver a seguinte equação:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}_{n+1}^{int} - \mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \mathbf{0}$$

- (i) Definir valor das forças exteriores

$$\mathbf{f}_{n+1}^{ext} = \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{f}}^{ext}$$

- (ii) Definir valores de arranque para a variável  $\mathbf{u}$ , os resíduos  $\mathbf{r}$  e a tolerância de convergência

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}_n$$

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{f}_{n+1}^{int (0)} - \mathbf{f}_{n+1}^{ext}$$

- (iii) Incrementar as iterações

$$i = i + 1$$

- (iv) Calcular a matriz com as derivadas das funções

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}$$

- (v) Resolver o sistema de equações

$$\mathbf{K}^{(i)} \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}^{(i)}$$

- (vi) Actualizar os deslocamentos

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + \delta \mathbf{u}$$

- (vii) Verificar convergência

*Se  $\|\mathbf{r}\| < tol$  Fim das iteração,  $\mathbf{u}^{(i+1)}$  é a solução do sistema*

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)}$$

*Caso contrário volta a (iii)*

Tal como é visível no Quadro 1, o cálculo da derivada da função de resíduo corresponde à determinação da matriz de rigidez global do problema, que é obtida pela assemblagem da matriz de rigidez dos vários elementos.

$$\mathbf{K} = \text{Assemb}_{e=1}^{e=nelem}(\mathbf{K}^{(e)}) \quad (3.41)$$

Por sua vez  $k^{(e)}$  é dado:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B} \, dv \quad (3.42)$$

A matriz tangente consistente  $\mathbf{D}$  corresponde a:

$$\mathbf{D} = \left. \frac{\partial \tilde{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (3.43)$$

Como se pode ver na equação (3.36), as forças internas são dependentes de  $\boldsymbol{\sigma}$ , que por sua vez é dependente de uma função específica de cada material. Também o cálculo da matriz  $\mathbf{D}$  (3.43) é dependente do material utilizado. Por este motivo, em seguida, faz-se uma breve síntese relativamente aos modelos constitutivos dos materiais.

### 3.3 – Modelos constitutivos

Os modelos constitutivos de materiais sólidos são normalmente descritos por um conjunto de equações diferenciais que pretendem descrever o comportamento do material quando sujeito a algum tipo de solitação. Existem essencialmente dois grupos de modelos matemáticos, dependendo do tipo de material e principalmente do tipo de solitação: Elastoplástico e Elastoviscoelástico.

Nos modelos elastoplásticos considera-se que o comportamento do material é independente do tempo ou da velocidade de aplicação das forças/deslocamentos. Utiliza-se este tipo de modelos para descrever problemas submetidos a solitações estáticas ou quase estáticas.

Os modelos elastoviscoelásticos pretendem descrever comportamentos com dependência no tempo ou transientes, tais como fluência ou velocidades de deformação elevadas.

Nesta tese aborda-se apenas os modelos constitutivos que têm por base o comportamento elastoplástico.

No âmbito de um programa de elementos finitos, a introdução de um modelo constitutivo necessita que sejam desenvolvidas duas funções:

- Cálculo da matriz tangente consistente;
- Actualização de estado.

O cálculo da matriz tangente consistente é essencial para a resolução do sistema de equações  $\mathbf{K} \delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}$ , necessário para o método de Newton Raphson, implementado no algoritmo de discretização do pseudo-tempo. Pretende-se, assim, calcular a relação  $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$  para o estado actual de tensões, deformações e variáveis internas.

A actualização de estado vai calcular as tensões, que irão em seguida ser utilizadas no cálculo das forças internas, também necessárias para o algoritmo de discretização no pseudo-tempo. Pretende-se, assim, conhecendo o estado de deformação no instante actual,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , e o historial de deformações, determinar o estado de tensão actualizado, bem como, a actualização das restantes variáveis internas.

No caso mais geral, um modelo constitutivo elastoplástico é descrito por:

- 1- Decomposição do tensor das deformações, em deformações elásticas e plásticas:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad \text{ou} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (3.44)$$

- 2- Função de energia livre:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.45)$$

- 3- Equação para  $\boldsymbol{\sigma}$  e para as variáveis de endurecimento  $\boldsymbol{A}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (3.46) \quad \boldsymbol{A} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (3.47)$$

- 4- Função de potencial plástico:

$$\Psi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A}) \quad (3.48)$$

- 5- Função de cedência:

$$\Phi = \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A}) \quad (3.49)$$

- 6- Regra de evolução da deformação plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A}) \quad (3.50)$$

- 7- Regra de encruamento:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{A}) \quad (3.51)$$

- 8- Critério de carregamento/descarregamento:

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi = 0 \quad (3.52)$$

### 3.3.1 – Função de potencial plástico

No caso da função de potencial plástico (3.48) corresponder à função de cedência (3.49),  $\Psi = \Phi$ , trata-se de um modelo constitutivo com fluxo associado. Caso contrário, é fluxo não associado. A utilização de modelos com fluxo não associado prende-se com o facto de se obter diferentes evoluções da deformação plástica uma vez que o fluxo plástico passa a ser normal a uma outra função de potencial

(elíptica, esférica, etc). A utilização de fluxo não associativo permite em certos modelos obter resultados mais próximos da realidade, como por exemplo no modelo de Drucker-Prager (Souza Neto, Owen, & Perić, 2008).

A função potencial é responsável por definir o modo como a plasticidade evolui.

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} N = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \quad (3.53)$$

Sendo assim, a deformação plástica dá-se na direcção normal à superfície descrita pela função  $\Psi$ , que pode corresponder ou não à função de cedência  $\Phi$ .

### 3.3.2 – Critério de plasticidade, encruamento

A função de cedência é uma lei que define o limite elástico para um qualquer estado de tensão aplicado. É a função de cedência (3.49) que determina se o material está em regime elástico ou plástico. Esta depende das tensões  $\sigma$  e de um conjunto de variáveis de endurecimento  $\mathbf{A}$ . Pode-se normalmente fazer uma representação gráfica da mesma no referencial de Westergaard, em que os eixos correspondem às tensões principais. A Figura 3.3 é um exemplo ilustrativo de uma função de cedência, neste caso de von Mises.

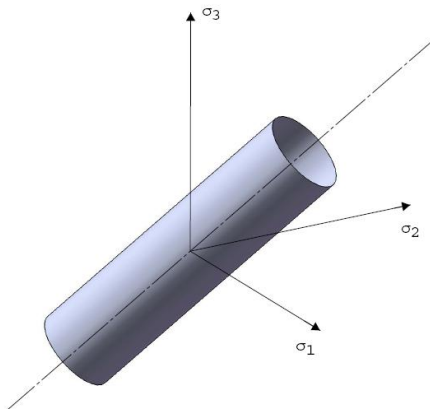


Figura 3.3 – Representação da superfície de cedência de von Mises no espaço de Westergaard

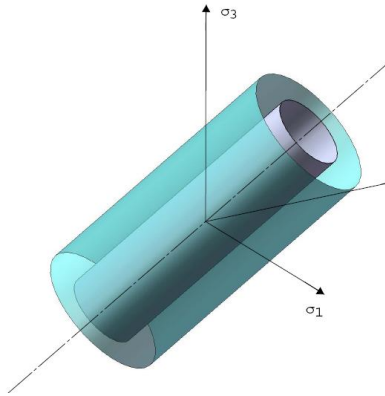
A forma como esta superfície evolui define o tipo de encruamento, podendo este ser Isotrópico ou Cinemático. No caso de materiais perfeitamente plásticos, não se verifica endurecimento e, como tal, a superfície de cedência mantém a sua forma original.

A evolução da superfície de cedência impõe novas condições para que se verifique escoamento plástico após o material ter entrado em plasticidade.

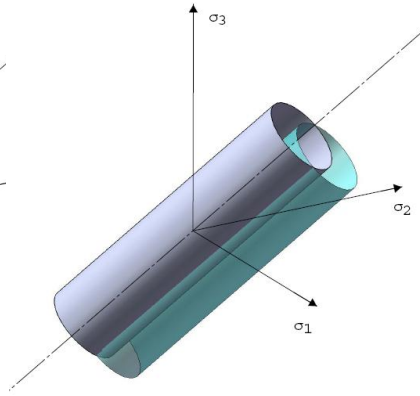
Num encruamento isotrópico (Figura 3.4), em qualquer instante, a superfície evolui de forma uniforme, não havendo translação. Este tipo de encruamento não consegue, no entanto, reproduzir o efeito de Baushinger – um material, após entrar em plasticidade à compressão/tracção, apresenta uma

tensão de cedência inferior à inicial na direcção oposta (Figura 3.7). Surge assim o encruamento cinemático, que faz a extensão do caso uniaxial para o espaço das tensões. Este critério de encruamento prevê uma translação da superfície (Figura 3.5).

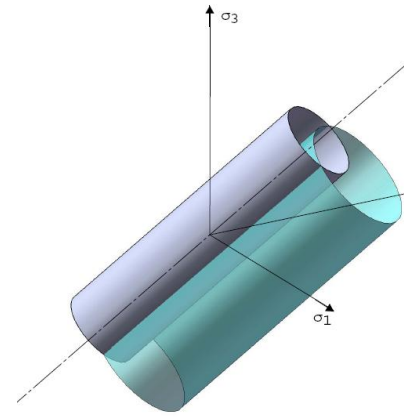
É ainda possível haver uma combinação dos dois tipos de endurecimento ( Figura 3.6).



**Figura 3.4 – Representação de encruamento isotrópico no modelo de von Mises**

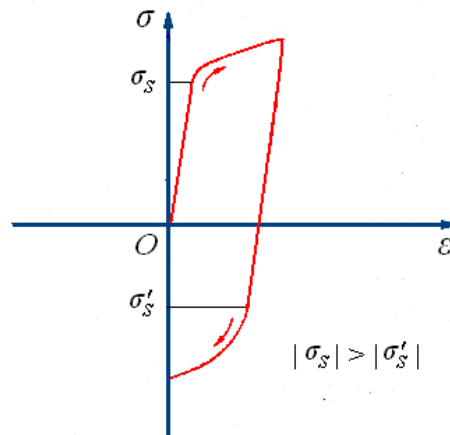


**Figura 3.5 – Representação de encruamento cinemático no modelo de von Mises**



**Figura 3.6 – Representação de encruamento misto no modelo de von Mises**

A superfície a cinzento representa o estado inicial. A superfície a azul representa a evolução da superfície de cedência.



**Figura 3.7 – Representação do efeito de Baushinger**

### 3.3.3 – Discretização do modelo constitutivo

Tal como referido anteriormente, este problema consiste em resolver as equações descritivas do modelo, previamente apresentadas.

Mais uma vez, para a resolução do problema de actualização de estado, utiliza-se a discretização no pseudo-tempo.



Partindo das equações (3.44) e (3.50) obtém-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \dot{\gamma} \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \quad (3.54)$$

As equações (3.54), juntamente com (3.51) sujeitas às restrições (3.52) resultam no sistema de equações diferenciais a resolver.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e(t) &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \dot{\gamma}(t) \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) &= \dot{\gamma}(t) \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) \leq 0 \quad \dot{\gamma}(t) \geq 0 \quad \dot{\gamma}(t) \Phi(\boldsymbol{\sigma}(t), \mathbf{A}(t)) = 0 \quad (3.56)$$

Para resolução do sistema de equações diferenciais (3.55) aplica-se o método de Backward Euler, que se encontra descrito no Anexo B. A razão de utilização deste método prende-se com a sua estabilidade incondicional, que resulta em maior robustez do algoritmo. Obtém-se, assim,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \\ \boldsymbol{\alpha}_{n+1} &= \boldsymbol{\alpha}_n + \Delta \gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \leq 0 \quad , \quad \Delta \gamma \geq 0 \quad , \quad \Delta \gamma \Phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) = 0 \quad (3.58)$$

Com

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \Big|_{n+1} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{A}_{n+1} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Big|_{n+1} \quad (3.60)$$

Uma análise mais detalhada das restrições (3.58) revela que apenas existem dois casos possíveis:

$\Delta \gamma = 0$ , o que resulta em  $\phi \leq 0$ , sendo neste caso a solução obtida por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.61)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n \quad (3.62)$$

$\Delta \gamma > 0$ , o que resulta em  $\phi = 0$ . Neste caso a solução é obtida resolvendo o sistema (3.57).

O método de resolução para o problema de actualização de estado passa então por assumir que a primeira condição se verifica (incremento elástico) e calcular as variáveis tentativa por meio das equações (3.61), (3.62), (3.59) e (3.60). Em seguida, esse pressuposto é testado, utilizando para isso a função de cedência. Caso o estado tentativa verifique a condição de elasticidade,  $\Phi \leq 0$ , o incremento é efectivamente elástico e, como tal, as variáveis tentativa são o resultado. Se tal não se verificar,  $\Phi > 0$ , trata-se de um incremento plástico, pelo que se torna necessário resolver o sistema de equações (3.57), método denominado “Return mapping”.

A solução do sistema (3.57), por ser não linear, é, uma vez mais, obtida pelo método de Newton Raphson.

Em seguida apresenta-se o algoritmo para a actualização de estado.

**Quadro 2 – Algoritmo genérico para actualização de estado**

(i) Cálculo das variáveis no estado tentativa

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\alpha}_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \bar{\rho} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right|_{n+1}^{trial}$$

$$\mathbf{A}_{n+1}^{trial} = \bar{\rho} \left. \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right|_{n+1}^{trial}$$

(ii) Verificar critério de plasticidade

$$\text{Se } \Phi \leq 0$$

*variáveis actualizadas = variáveis tentativa*

*Caso contrário*

*Resolver sistema (3.56)*

(iii) Fim

## Capítulo 4

### Aplicação de alguns modelos constitutivos

Este capítulo tem como objectivo fazer uma comparação qualitativa e quantitativa entre os resultados experimentais e os resultados numéricos obtidos utilizando alguns modelos constitutivos de materiais disponíveis no programa de elementos finitos utilizado. Pretende-se, desta forma, perceber as vantagens ou limitações associadas a cada um deles na aplicação a diversos problemas distintos cujo material é uma espuma metálica.

Todas as simulações numéricas foram efectuadas no programa “HYPLAS”. Trata-se de um programa com fins académicos com a capacidade de análise de problemas com pequenas e grandes deformações, de sólidos hiperelásticos ou elastoplásticos. Este programa faz separadamente a extensão para grandes deformações, o que alarga o espectro de aplicações de um modelo implementado. De salientar ainda que é de código aberto (na linguagem Fortran 90), pelo que se torna mais fácil implementar e testar novos modelos.

Para cada modelo de material são descritos três exemplos. O primeiro é relativo ao critério de cedência e tem por fim avaliar de que forma a superfície de cedência inicial consegue captar a realidade obtida nos ensaios experimentais.

O segundo exemplo visa analisar a evolução plástica. Trata-se de um ensaio de compressão de um provete cilíndrico. Deste ensaio numérico são retiradas as curvas Tensão-Deslocamento que serão em seguida comparadas com os dados experimentais.

O último exemplo é meramente qualitativo. Trata-se de um ensaio de indentação. Pretende-se avaliar o modo de deformação resultante da aplicação de cada modelo.

Os exemplos apresentados são relativamente simples. Tal deve-se, por um lado, à escassa informação experimental ou analítica do comportamento destes materiais sujeitos a outras solicitações que sirva de base de comparação, mas também a limitações do programa HYPLAS, que apenas possibilita a análise bidimensional, não incluindo de contacto ou regeneração de malha.

Faz-se em seguida uma descrição mais detalhada de cada um dos exemplos, bem como uma apresentação dos resultados esperados.

## 4.1 – Exemplos estudados

### 4.1.1 – Simulação de tracção multiaxial com provete em borboleta

Este exemplo é efectuado para simular os resultados obtidos por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003) e tem por objectivo avaliar a forma como cada modelo capta o momento de cedência.

Através dos resultados obtidos experimentalmente, Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003) apresenta duas superfícies que delimitam os pontos experimentais resultantes dos ensaios efectuados.

Neste ensaio, um provete com forma de borboleta, Figura 4.2, é sujeito a um estado plano de tensão uniforme na sua secção central. Variando o ângulo de aplicação da força,  $\alpha$ , obtêm-se diferentes estados de tensão.

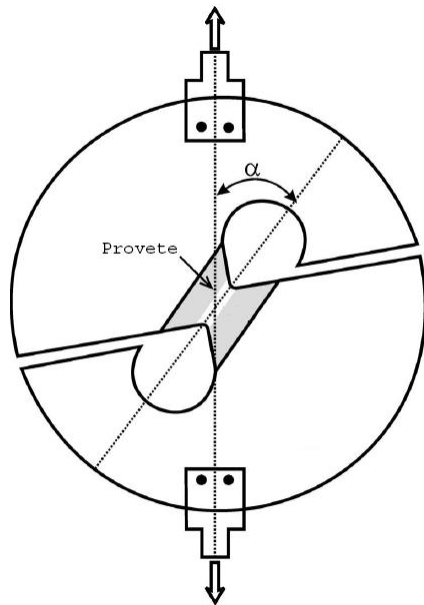


Figura 4.1 – Dispositivo para realização do ensaio de Arcan

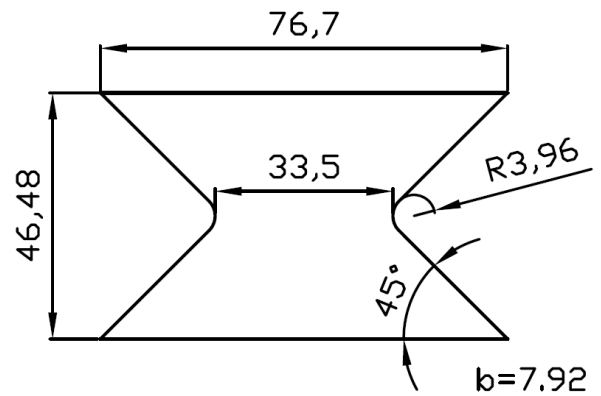


Figura 4.2 – Geometria do provete em borboleta para ensaio de tracção multiaxial

Os resultados obtidos por Doyoyo indicam que os pontos experimentais de cedência se situam limitados por duas superfícies descritas por (4.1), variando o parâmetro  $\eta$  entre 1.1 e 1.3. Este parâmetro define a forma das curvas e é obtido por aproximação aos resultados experimentais.

$$\Phi = 3J_2 + 9(\eta^2 - 1)p^2 + 3\eta^2(\sigma_c - \sigma_t)p - \eta^2\sigma_c\sigma_t \quad (4.1)$$

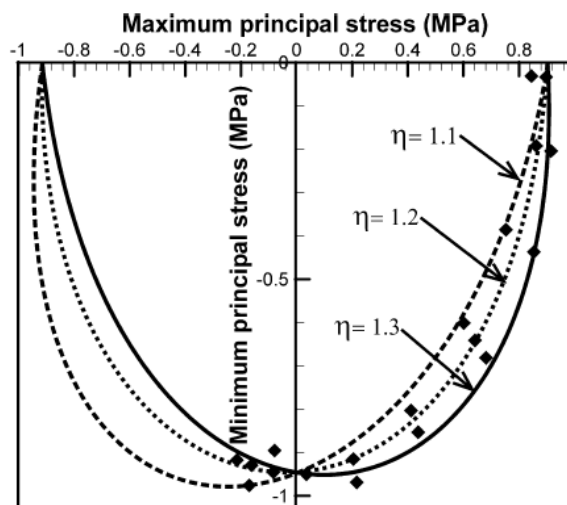


Figura 4.3 – Nuvem de pontos experimentais e superfícies limite obtidas por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003)

Para a execução numérica deste exemplo, utilizou-se uma malha constituída por elementos de 8 nós, com integração reduzida, discretizada conforme se representa na Figura 4.4.

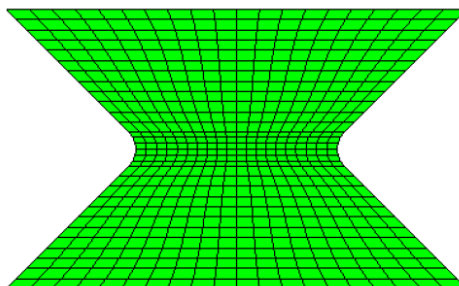


Figura 4.4 – Discretização da malha para o provete em borboleta

Pretende-se avaliar se os resultados numéricos obtidos utilizando os vários modelos e respectivas superfícies de cedência estão dentro dos limites definidos pelas curvas propostas por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003).

#### 4.1.2 – Simulação da compressão uniaxial

Esta simulação visa comparar a curva de tensão-deformação resultante de um ensaio de compressão uniaxial com o valor obtido numericamente utilizando um determinado modelo de material. Pretende-se avaliar de que forma o encruamento do modelo corresponde à situação verificada experimentalmente. Também é possível, através da deformada obtida, avaliar um outro parâmetro importante nas espumas, o coeficiente de Poisson plástico.

O exemplo efectuado é a compressão de um cilindro com dimensões de acordo com as da Figura 4.5. Por se tratar de um problema com simetria segundo  $x$  e  $y$ , apenas se considerou um quarto do provete, sujeito às condições de fronteira descritas na Figura 4.6. A discretização por elementos finitos considerada é a que se encontra representada na Figura 4.7. Como se pode ver, os elementos na sua configuração inicial apresentam-se bastante alongados segundo a direcção axial. Pretende-se com isto

compensar a deformação sofrida pelos elementos ao longo do problema, prevenindo-se a sua deformação exagerada (neste caso achatamento), o que se traduz num aumento do “domínio” de aplicação desta malha.

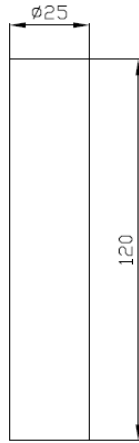


Figura 4.5 – Geometria provete de compressão

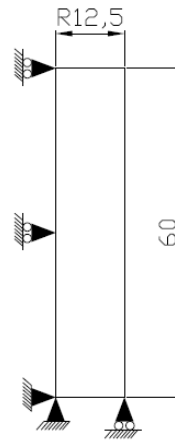


Figura 4.6 – Condições de fronteira da geometria utilizada na simulação numérica

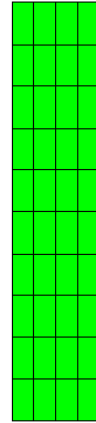


Figura 4.7 – Discretização da geometria do provete de compressão

Os resultados considerados “padrão” são a expressão analítica (4.3), resultante da fórmula (4.2), proposta por Wierzbicki (Wierzbicki & Doyoyo, 2003), que aproxima os resultados experimentais obtidos.

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_{y_0}} = \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_d} \right)^{\frac{1}{n}-1} \right]^{-1} \quad (4.2)$$

Na expressão anterior,  $\varepsilon_d$  corresponde à deformação de densificação e  $n$  é um coeficiente de calibração da curva. Ambos são parâmetros do material.

Através da análise da Figura 4.8 b), é possível concluir que a expressão (4.2) se aproxima bastante do comportamento típico dos materiais celulares, sendo bem evidentes as três zonas de deformação. No entanto, não descreve adequadamente a zona elástica, como se pode ver na Figura 4.8 a).

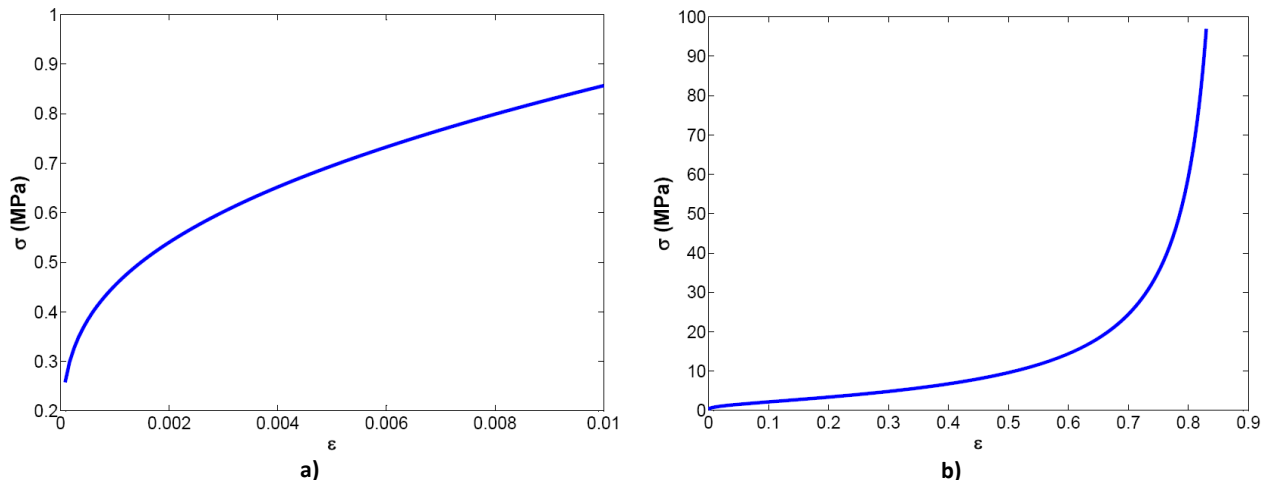


Figura 4.8 – Resultado esperado para o ensaio de compressão uniaxial

Assim, esta expressão é válida unicamente para valores de deformação em que se verifica plasticidade. Esta limitação é resolvida considerando a lei linear elástica. Resulta assim:

$$\begin{cases} \sigma_y = E \varepsilon & se \quad \varepsilon \leq \frac{\sigma_{y0}}{E} \\ \sigma_y = \sigma_{y0} \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_d} \right)^{\frac{1}{n}-1} \right]^{-1} & se \quad \varepsilon > \frac{\sigma_{y0}}{E} \end{cases} \quad (4.3)$$

#### 4.1.3 – Simulação de indentação

Este exemplo é meramente qualitativo, uma vez que não se dispõe de dados numéricos que sirvam de base de comparação. O que se pretende é avaliar a forma como se dá a indentação e verificar se esta corresponde aos resultados experimentais.

Experimentalmente constata-se que um bloco de espuma sujeito a este ensaio apresenta uma zona bem delimitada de deformação. Apenas a zona situada na proximidade do indutor se deforma, apresentando o resto do corpo a forma inicial. Os deslocamentos em ambas as direcções verticais e horizontais esperam-se baixos nas zonas mais afastadas da indentação. Relativamente à deformação plástica, esta encontra-se muito concentrada na zona de indentação, sendo praticamente inexistente no resto do provete, Figura 4.9.

Neste exemplo, um bloco de espuma com as dimensões indicadas na Figura 4.10 é indentado numa largura de 15mm. Considera-se neste caso que o material se encontra em estado plano de deformação.

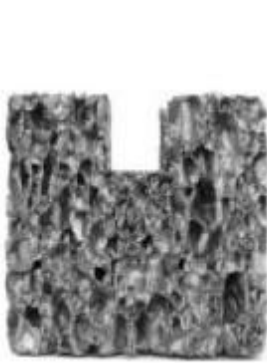


Figura 4.9 – Resultado de indentação de uma espuma metálica (Hanssen, Hopperstad, Langseth, & Ilstad, 2002)

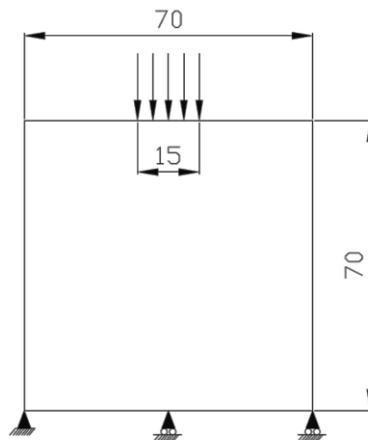


Figura 4.10 – Geometria e condições de fronteira utilizadas para exemplo de indentação

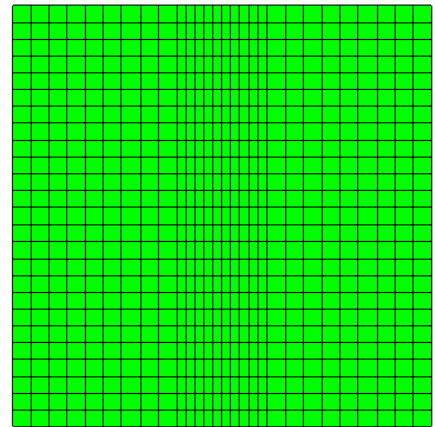


Figura 4.11 – Discretização do provete para o exemplo de indentação

O nível de indentação aplicado na simulação numérica não será tão elevado quanto no ensaio experimental, uma vez que para grandes deformações a malha fica distorcida e os resultados menos precisos. Esta limitação poderia ser ultrapassada utilizando regeneração de malha. No entanto, tal não se encontra implementado no Hyplas. Espera-se, ainda assim, conseguir retirar boas conclusões.

A influência da malha e do elemento utilizado foi minimizada. Todos os exemplos comparativos foram efectuados usando a mesma malha e o mesmo tipo de elemento. A malha utilizada foi refinada ao ponto de não se notar uma diferença significativa nos resultados obtidos quando em comparação com outra ainda mais refinada. A razão de não se utilizar malhas muito refinadas prendeu-se em primeiro lugar com o aumento do custo computacional, mas também devido ao facto de estes modelos serem contínuos. Ou seja, assume-se que o comportamento do material é homogéneo. A utilização de um modelo contínuo para descrever um material como uma espuma metálica corresponde a considerar o comportamento global do material como uma média do comportamento de cada uma das células e suas interações. Deste modo, a utilização de elementos cuja dimensão é inferior à dimensão das células é sair do domínio de aplicabilidade desta teoria (Onck, 2001).

Tanto o segundo como o terceiro exemplos, tendo em conta as deformações elevadas em causa, foram efectuados considerando a extensão para grandes deformações. Esta extensão, tal como referido previamente, é efectuada automaticamente pelo programa Hyplas. Por se encontrar fora do âmbito desta tese, este assunto não é abordado com mais detalhe.

Relativamente ao material usado na realização destes exemplos, utilizou-se como referência a espuma Alporas, com densidade relativa de 9.5% (Wierzbicki & Doyoyo, 2003). A utilização desta espuma prendeu-se com o facto de ser a única acerca da qual se encontraram todas as propriedades necessárias para elaboração das várias simulações. Para além do mais, esta espuma é praticamente isotrópica, indicada para os modelos de materiais em questão.

## 4.2 – von Mises

O modelo de von Mises é um dos mais utilizados para modelação do comportamento de metais dúcteis. A sua superfície de cedência é definida por:

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_p) = 0 \quad (4.4)$$

Na expressão (4.4),  $\mathbf{S}$  corresponde ao tensor das tensões desviadoras e  $\sigma_y$  é a função que define a tensão de cedência em ordem à deformação plástica acumulada,  $\bar{\epsilon}_p$ .

Como é evidente da expressão (4.4), este modelo não contempla uma dependência da pressão. Ou seja, este modelo considera que o material, quando sujeito a uma pressão hidrostática, não entra em deformação plástica. Ora, tal não se verifica no caso das espumas metálicas. Esta consideração pode levar a resultados menos precisos na determinação da cedência. Não se espera com este modelo obter uma boa capacidade de modelar a previsão da cedência, devido a estas limitações facilmente perceptíveis. Pretende-se, antes, ter uma visão global do comportamento do modelo em si, já que ele serve de base a outros mais avançados, desenvolvidos para espumas.

O modelo de von Mises utilizado prevê unicamente um encruamento isotrópico. Para definir esse mesmo encruamento é necessária uma relação Tensão Real – Deformação plástica real. Neste exemplo, a relação utilizada é obtida tendo por base a expressão analítica (4.2), proposta por Wierzbicki (Wierzbicki & Doyoyo, 2003), que aproxima os resultados experimentais obtidos para uma espuma



Alporas de densidade relativa de 9.5%. Em seguida fez-se a conversão de deformações de engenharia para deformações reais através da expressão:

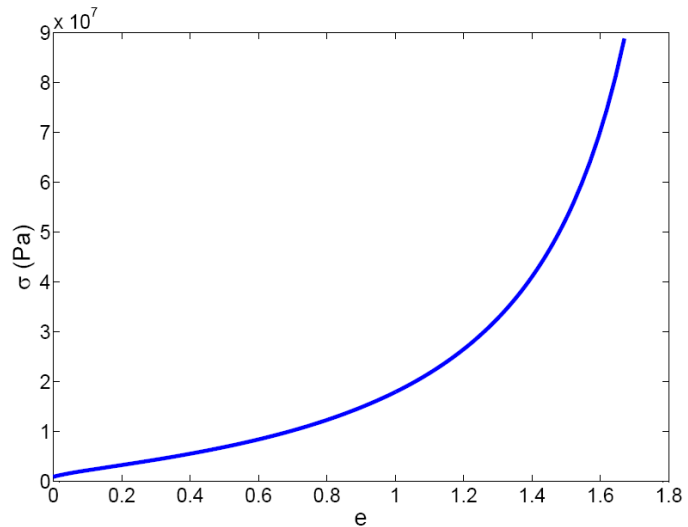
$$e = 1 - \exp(-\varepsilon)$$

No caso da conversão das tensões de engenharia para as tensões reais, considerou-se que as mesmas são iguais. Este pressuposto deve-se ao facto do coeficiente de Poisson plástico ser próximo de zero para pequenas deformações. Desta forma, admite-se que não há variação de área.

Os parâmetros utilizados neste modelo encontram-se listados na Tabela 5. A curva de calibração do material está representada na Figura 4.12.

**Tabela 5 – Propriedades utilizadas no modelo de von Mises**

$E$	0.69 GPa
$\nu$	0.3
$n$	1.2
$\varepsilon_d$	0.88



**Figura 4.12 – Curva calibração von Mises**

Apresentam-se em seguida os resultados numéricos obtidos nos três exemplos considerados.

#### 4.2.1 – Tracção multiaxial com provete em borboleta

Como se pode verificar na Figura 4.13, os pontos de cedência do material encontram-se todos situados ao longo de uma recta horizontal. Uma vez que a função de cedência é independente da pressão hidrostática, este modelo prevê a plasticidade sempre para o mesmo nível de tensão equivalente. Como se constata, isto não corresponde ao observado experimentalmente, verificando-se a existência de alguns pontos fora das curvas de envelope, Figura 4.13 e Figura 4.14.. Assim se pode concluir que a aplicabilidade desta superfície de cedência para a previsão de plasticidade em espumas é um pouco limitada. Principalmente nos casos em que a componente hidrostática da tensão é elevada, este modelo não consegue captar a realidade, prevendo tensões de cedência superiores às verdadeiramente verificadas. Para o caso de baixas tensões hidrostáticas este modelo é comedido, prevendo tensões inferiores.

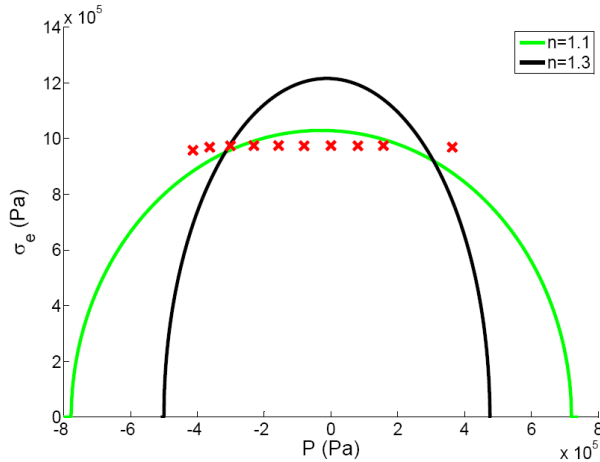


Figura 4.13 – Resultados numéricos von Mises, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática

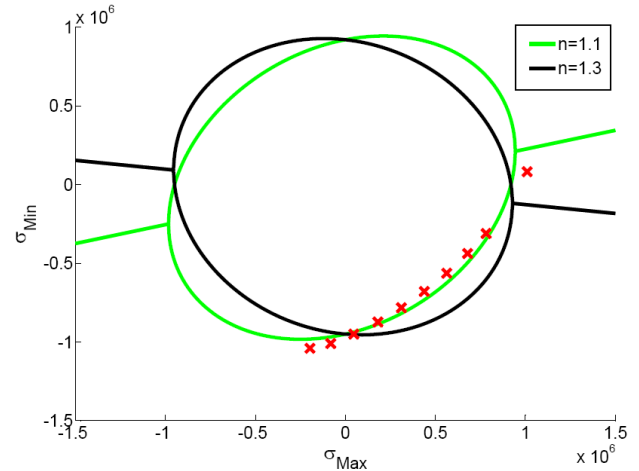


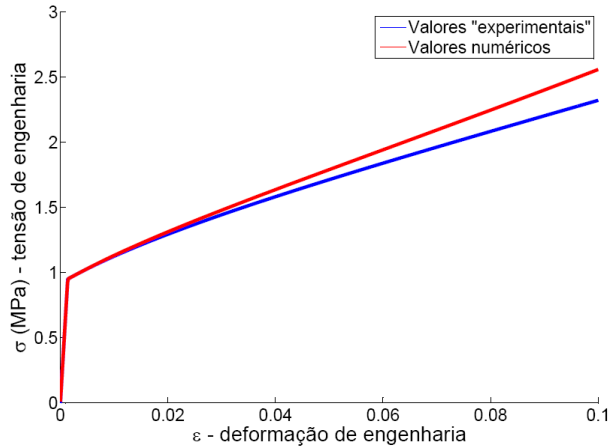
Figura 4.14 – Resultados numéricos von Mises, referencial tensões principais

#### 4.2.2 – Compressão uniaxial

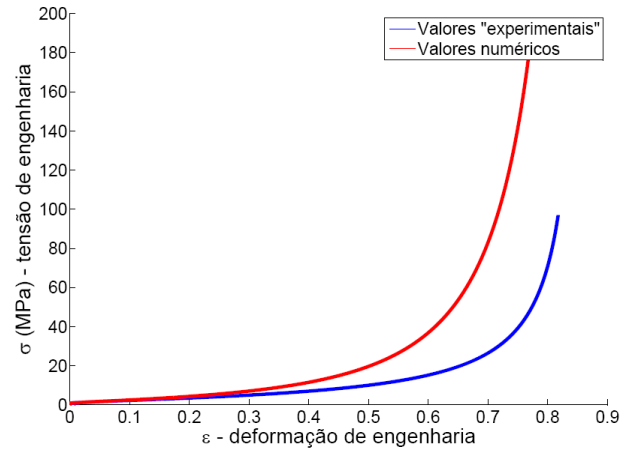
A análise dos resultados obtidos revela, como se pode ver na Figura 4.15, que a previsão da cedência plástica se encontra bastante próxima do resultado experimental. Isto deve-se ao facto de nesta solitação o estado de tensão se encontrar numa zona em que o modelo de von Mises consegue prever adequadamente o início de cedência plástica. Numa solitação uniaxial, sujeita a uma tensão  $\sigma_1$ , o valor da tensão equivalente de von Mises é dado por  $q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sigma_1$ . Simultaneamente, neste caso particular, a pressão hidrostática é dada por  $p = \frac{\sigma_1}{3}$ . Verificando a localização do ponto correspondente a este estado de tensão na Figura 4.13, constata-se a proximidade do mesmo com as curvas limite propostas através dos resultados experimentais.

Fica assim demonstrado que, embora de uma forma geral este modelo não seja capaz de descrever exactamente o início de plasticidade, neste caso mais simples, de compressão uniaxial, os resultados obtidos são bastante próximos dos experimentais.

Relativamente ao encruamento previsto por este modelo, para pequenas deformações os valores obtidos estão relativamente próximos dos valores padrão. No entanto, para grandes deformações constata-se que este modelo se afasta cada vez mais dos resultados experimentais (Figura 4.16). Verifica-se que o encruamento previsto com este modelo é mais acentuado do que acontece na realidade.

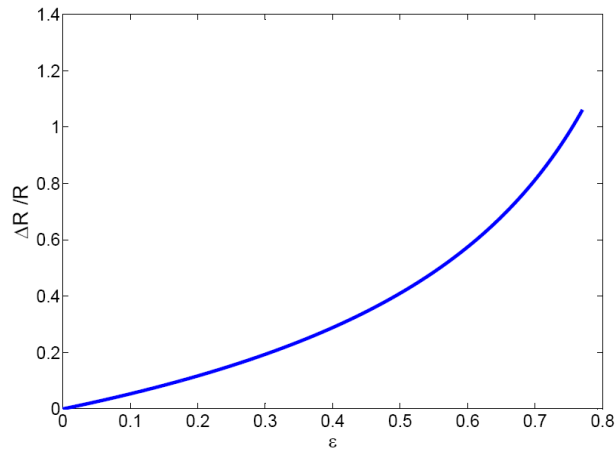


**Figura 4.15 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de von Mises, baixas deformações**

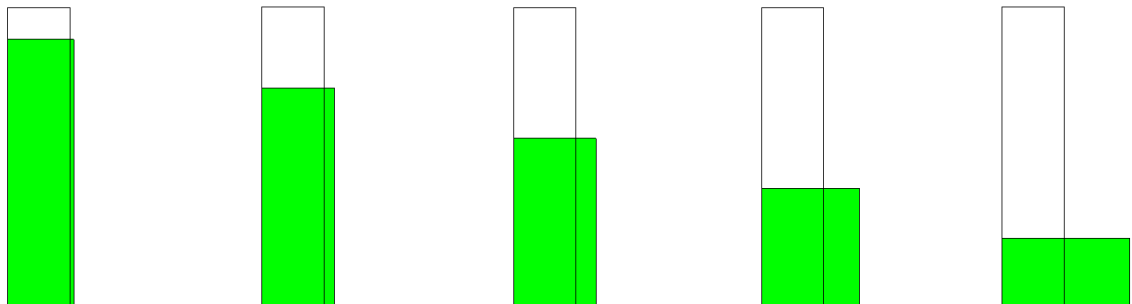


**Figura 4.16 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de von Mises**

Tendo em conta a deformada obtida, observa-se que há uma grande expansão lateral relativamente à dimensão inicial do provete. A espuma metálica em causa apresenta um coeficiente de Poisson praticamente igual a zero até valores de deformação relativamente elevados. Desta forma, a dimensão radial do provete deveria manter-se praticamente constante. Tal não se verifica utilizando este modelo (Figura 4.17 e Figura 4.18).



**Figura 4.17 – Gráfico de  $\Delta R/R$  em função de  $\epsilon_{yy}$  para o modelo de von Mises**



**Figura 4.18 – Evolução da deformada, modelo de von mises**

### 4.2.3 – Indentação

Analisando qualitativamente os resultados obtidos, verifica-se a existência de duas situações que não correspondem aos resultados experimentais. A Figura 4.20 revela que a deformação plástica acumulada se estende a grande parte do corpo. Isto encontra-se em contradição com os dados experimentais, que sugerem que a zona de plasticidade se resume quase exclusivamente à proximidade da indentação.

Por sua vez, a Figura 4.21 demonstra outro fenómeno que não está de acordo com o comportamento destes materiais. Este modelo prevê uma grande expansão lateral do corpo durante a indentação. Como se pode ver na Figura 4.9, tal não acontece na realidade.

Pela Figura 4.22 é ainda possível verificar que toda a superfície superior do corpo sofre um deslocamento segundo Y, o que também não é verificado experimentalmente

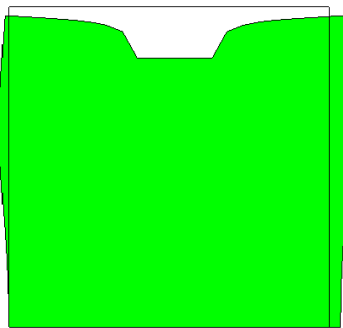


Figura 4.19 – Deformada von Mises, factor de multiplicação 4

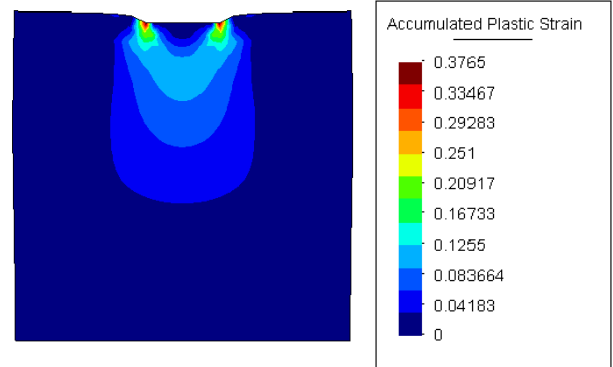


Figura 4.20 – Deformação plástica, von Mises

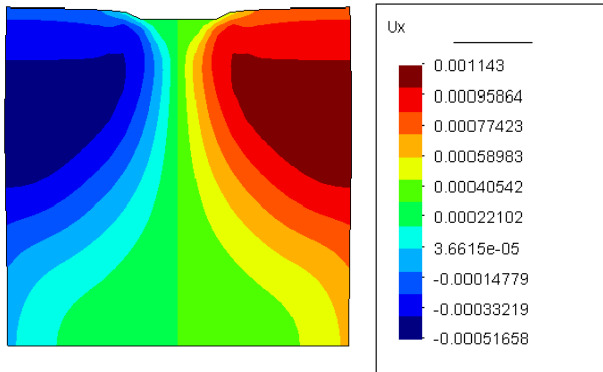


Figura 4.21 – Deslocamento xx, von Mises

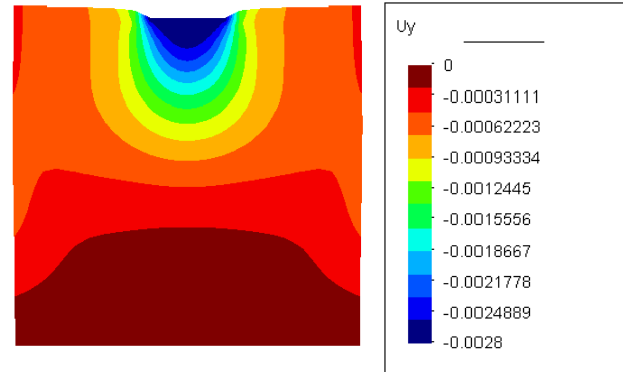


Figura 4.22 – Deslocamento yy, von Mises

Com este conjunto de simulações, foi possível identificar algumas limitações significativas associadas ao modelo de von Mises no que diz respeito à modelação de espumas metálicas:

- A função de cedência sobrestima as tensões de cedência para elevadas pressões hidrostáticas;
- A função de cedência subestima as tensões de cedência para baixas pressões hidrostáticas;
- O encruamento previsto é demasiado acentuado;
- A deformada obtida apresenta expansão lateral; o coeficiente de poisson plástico não é próximo de zero.

É assim possível concluir que a função de cedência não é a mais indicada, uma vez que não retrata devidamente a cedência para todos os estados de tensão possíveis. Também a função de potencial plástico, que neste caso é a função de cedência, não é a mais apropriada, uma vez que prevê deformadas que não estão de acordo com os resultados reais.

### 4.3 – Gurson

O modelo de Gurson (Gurson, 1977), foi desenvolvido para simular o mecanismo da evolução do dano sob a forma de crescimento de vazios no interior do sólido.

A função de cedência é dada por:

$$\phi = J_2 - \frac{1}{3} \left\{ 1 + D^2 - 2D \cosh \left( \frac{3p}{2\sigma_y} \right) \right\} \sigma_y^2 \quad (4.5)$$

Em que  $D$  corresponde à variável de dano, que neste caso é a fracção volúmica de vazios. Esta variável evolui durante o carregamento do material.  $J_2$  é o segundo invariante das tensões desviadoras,  $p$  é a pressão hidrostática e  $\sigma_y$  é a tensão limite elástica.

Comparativamente com o modelo de von Mises, anteriormente apresentado, este modelo já inclui na sua função de cedência a influência da pressão hidrostática. Por outro lado, uma vez que a variável de dano corresponde à fracção volumétrica de vazios, é fácil fazer a extrapolação deste modelo para o caso das espumas metálicas, relacionando a variável de dano com a densidade relativa das espumas.

$$D_0 = \frac{V_{poros}}{V^*} = \frac{V^* - V}{V^*} = 1 - \frac{V}{V^*} = 1 - \frac{\frac{m}{\rho}}{\frac{m^*}{\rho^*}} = 1 - \frac{\rho^*}{\rho} \quad (4.6)$$

uma vez que  $m^* = m$ .

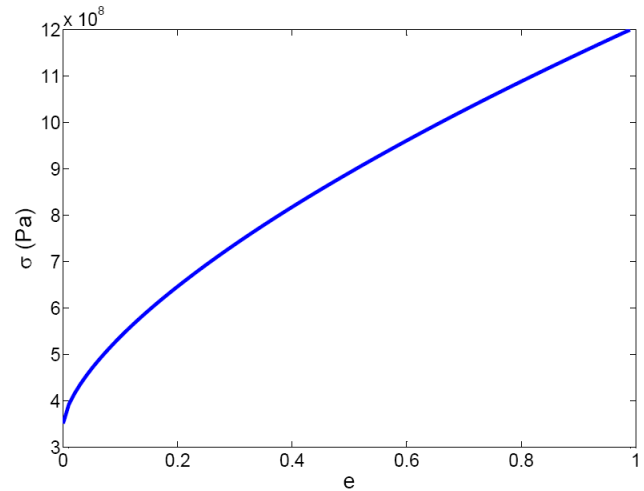
Neste caso, ao contrário do que foi feito no modelo de von Mises, a função a utilizar para calibração do material tem de ser uma curva tensão – deformação de alumínio sólido. A função utilizada foi proposta por X.Teng (Teng, 2008), e é dada por:  $\sigma = 352 + 853.4 \bar{\epsilon}^{0.66} [MPa]$ .

De salientar ainda, que considerando a variável de dano igual a zero, este modelo reduz-se ao modelo de von Mises (supondo que se usa a mesma curva de endurecimento).

Os parâmetros utilizados para calibrar este modelo encontram-se em seguida.

**Tabela 6 – Propriedades utilizadas no modelo de Gurson**

$E$	72.4 GPa
$\nu$	0.3
$D_0$	0.91



**Figura 4.23 – Curva de calibração do modelo de Gurson**

#### 4.3.1 – Tracção multiaxial com provete em borboleta

Para a realização deste exemplo, foi necessário implementar no programa “HYPLAS” o algoritmo para actualização de tensões para o estado plano de tensão. A técnica utilizada encontra-se descrita mais detalhadamente no Anexo C.

A Tabela 7 apresenta a convergência deste modelo. Nesta tabela é visível a convergência local, a nível do ponto de Gauss na rotina de actualização de estado para o caso axisimétrico, e a convergência do método de Newton Raphson que garante tensão segundo a direcção Z igual a zero. Como é visível, este método apresenta convergência quadrática, excepto para valores de resíduo já muito próximos de zero. Este facto deve-se em parte à precisão de cálculo do próprio computador.

**Tabela 7 – Convergência do algoritmo para resolução de problemas em estado plano de tensão**

Método de Newton-Raphson para garantir $\sigma_{zz} = 0$		Nível local, rotina para actualização de estado para problemas axisimétricos	
Iteração	Resíduo	Iteração	Resíduo
1	1.419492997229099E-002	1	2622899.43679161
		2	15374.5037289308
		3	13920.4881717615
		4	2.985801411279808E-005
		5	3.610931157498874E-008
2	7.512047886848450E-006	1	2622899.43470818
		2	1.91774392436183
		3	2.982942816142280E-005
		4	1.184334494471052E-008
3	8.754432201385498E-008	1	2622899.43470985
		2	13920.4881471787
		3	1.91774380052684
		4	2.996312029980892E-005
		5	1.693772875406914E-008

Os resultados obtidos neste exemplo (Figura 4.24 e Figura 4.25) revelam que este modelo é completamente inadequado para a modelação de espumas metálicas. O estado de tensão previsto no momento de cedência é muito superior ao observado na realidade para estes materiais.

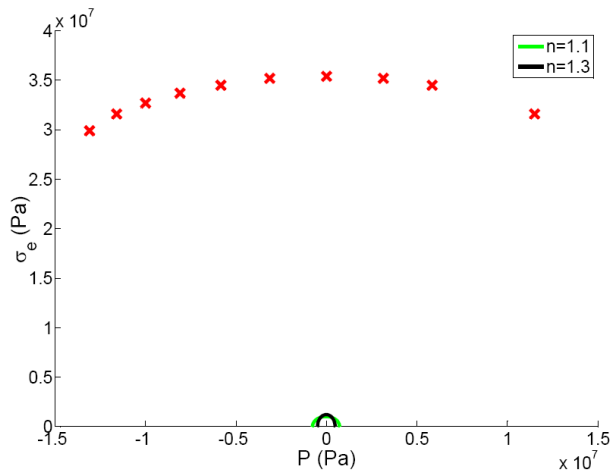


Figura 4.24 – Resultados numéricos Gurson, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática

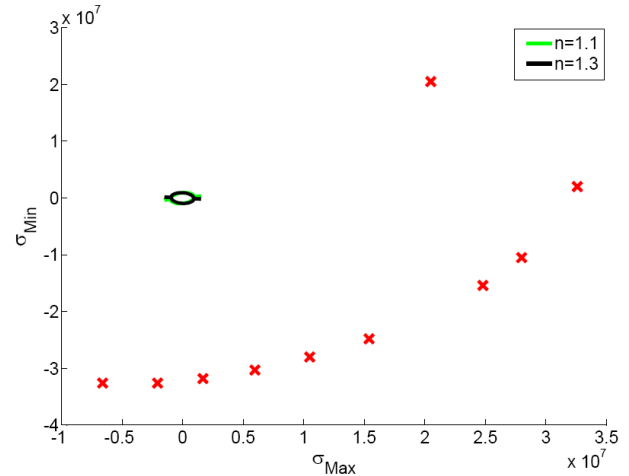


Figura 4.25 – Resultados numéricos Gurson, referencial tensões principais

### 4.3.2 – Compressão uniaxial

Mais uma vez, tendo por base os resultados obtidos neste exemplo, se pode constatar a incapacidade deste modelo para simular este tipo de problemas. Tendo por base a Figura 4.27, é possível verificar que o nível de tensão previsto é muito superior ao real. Também se verifica que mesmo no domínio elástico este modelo se afasta muito da realidade, uma vez que apresenta um módulo de Young correspondente ao de alumínio sólido, muito superior ao das espumas (Figura 4.26).

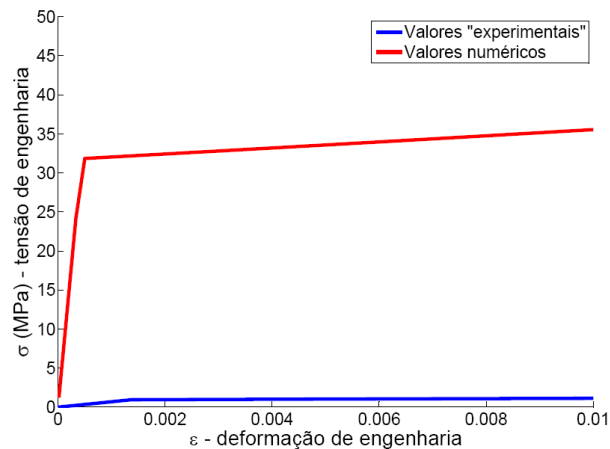


Figura 4.26 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando o modelo de Gurson, baixas deformações

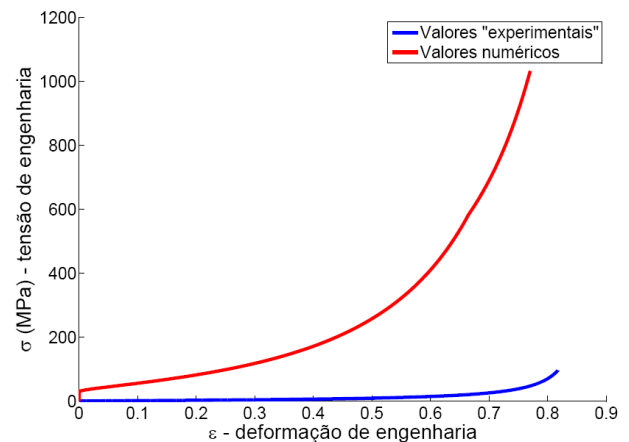


Figura 4.27 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando o modelo de Gurson

A Figura 4.28 revela ainda que a evolução do dano não está de acordo com a evolução da densidade relativa da espuma. Após uma deformação de aproximadamente 0.8, a variável dano (fracção volúmica) é igual a sensivelmente 0.78, o que corresponde a uma densidade relativa de apenas 22%. Os dados experimentais obtidos por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003) apontam para uma deformação de

densificação (para o caso uniaxial) de 0.88. Ora, para um grau de deformação tão perto do valor de densificação, espera-se uma densidade relativa consideravelmente próxima da unidade, muito superior à apontada por este modelo.

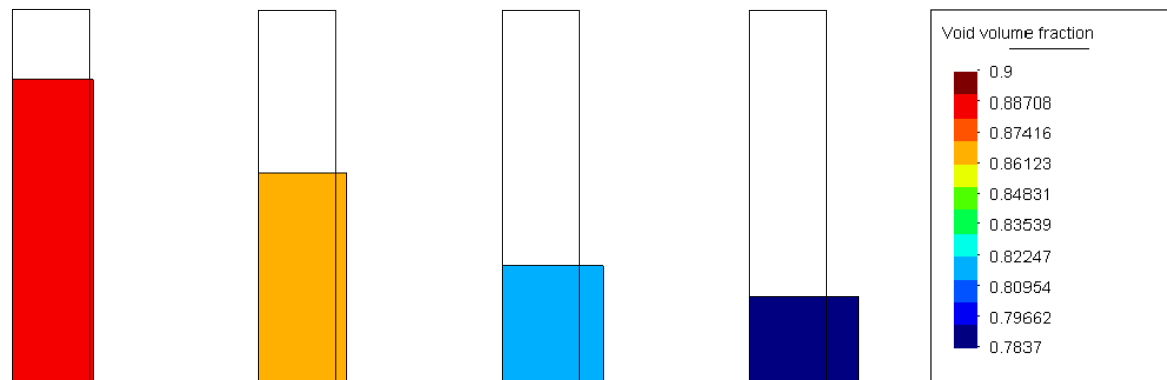


Figura 4.28 – Evolução da deformação e variável de dano, modelo de Gurson

À semelhança do que se verificou no modelo de von Mises, também no modelo de Gurson há uma expansão lateral bastante significativa durante a compressão, Figura 4.28 e Figura 4.29, o que não corresponde à realidade.

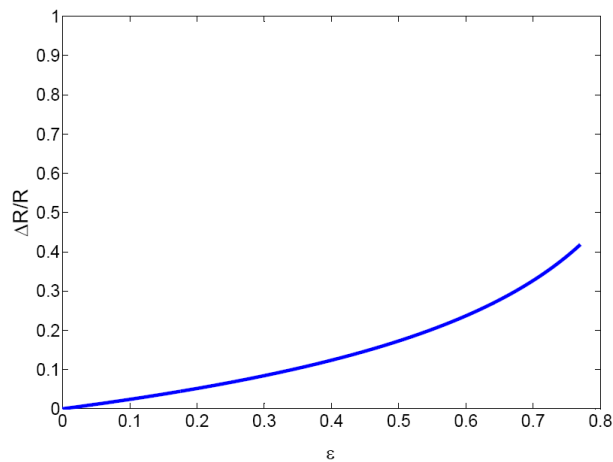


Figura 4.29 – Gráfico de  $\Delta R/R$  função de  $\epsilon_{yy}$  para o modelo Gurson

### 4.3.3 – Indentação

Relativamente aos resultados obtidos para a deformação plástica, deslocamento segundo  $xx$  e  $yy$  (Figura 4.31, Figura 4.32 e Figura 4.33, respectivamente), estes parecem, à primeira vista, de acordo com a realidade. Por um lado, a zona de plasticidade é mais concentrada, por outro, a expansão lateral é reduzida. Ao mesmo tempo, os deslocamentos segundo  $Y$  são bastante concentrados na zona de indentação. No entanto, cruzando dados com os exemplos anteriores, a razão pela qual a zona plástica é mais reduzida é de fácil compreensão. Como se viu anteriormente, este modelo não consegue prever a plasticidade correctamente, admitindo sempre valores para o estado de tensão muito superiores à realidade. Desta forma, a zona plástica para o exemplo de indentação é mais reduzida e concentrada.



Relativamente aos deslocamentos, estes são menores devido à previsão exagerada do módulo de elasticidade obtida com este modelo, como se viu no exemplo de compressão uniaxial.

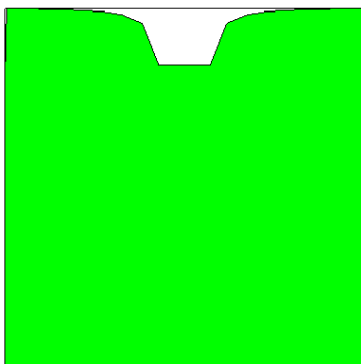


Figura 4.30 – Deformada Gurson, factor de multiplicação 4

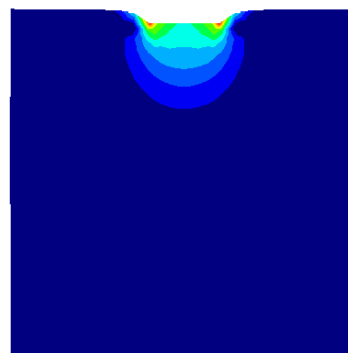


Figura 4.31 – Deformação plástica acumulada, Gurson

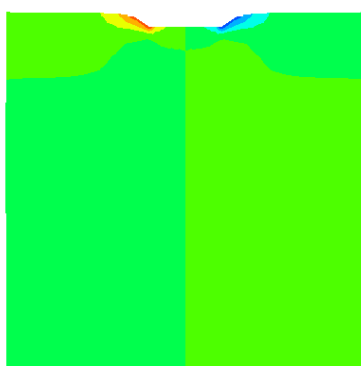
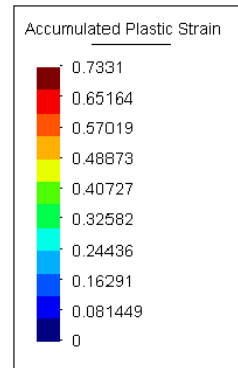


Figura 4.32 – Deslocamento xx, Gurson

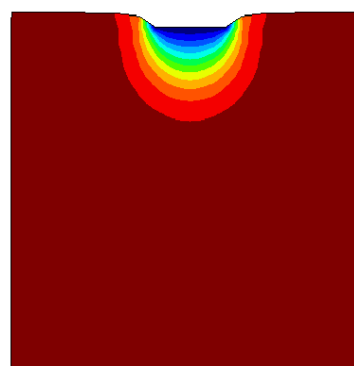
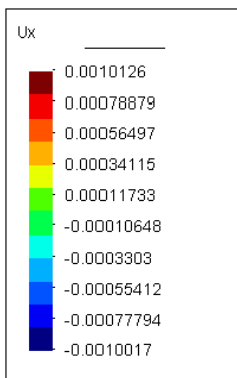
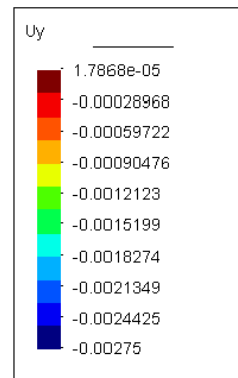


Figura 4.33 – Deslocamento yy, Gurson



Pelas simulações efectuadas, pode-se concluir que este modelo é muito inadequado para modelação do comportamento de espumas. Apesar de teoricamente apresentar vantagens relativamente ao modelo de von Mises, por considerar na superfície de cedência a influência da pressão hidrostática, verifica-se que na realidade está longe de ser aplicável a estes materiais. Quer no domínio elástico quer no domínio plástico, os resultados previstos situam-se bastante distantes da realidade. Isto indicia que as suposições feitas para este modelo não são válidas para um valor de dano tão elevado, motivo pelo qual é incapaz de retratar o comportamento das espumas.

#### 4.4 – Cam Clay

O modelo de Cam Clay foi proposto para modelar o comportamento plástico de solos (Roscoe & Burland, 1968). É um modelo bastante complexo, uma vez que permite simular o comportamento de sólidos com múltiplas fases com efeito acoplado (interacção entre o sólido e o escoamento de fluido através das suas porosidades). Por este motivo, a sua abordagem matemática não é apresentada neste trabalho. A utilização deste modelo nesta tese prende-se com facto de, como se irá ver em seguida, o mesmo ser um caso mais geral do modelo implementado no software comercial de elementos finitos *Abaqus* para modelação de espumas metálicas (Abaqus, Inc, 2003).

No modelo do *Abaqus* a superfície de cedência é definida por

$$\sqrt{\left(p - \frac{1}{2}(p_c - p_t)\right)^2 + \left(\frac{q}{M_0}\right)^2} - a = 0 \quad (4.7)$$

em que:

$$M_0 = \frac{b}{a} = \frac{\sigma_{y_0}}{\sqrt{p_{t_0}p_{c_0} - \frac{1}{3}\sigma_{y_0}(p_{t_0} - p_{c_0}) - \frac{1}{9}\sigma_{y_0}^2}} \quad (4.8)$$

e  $p_c$  é a pressão hidrostática de compressão de cedência,  $p_t$  é a pressão hidrostática de tracção de cedência.

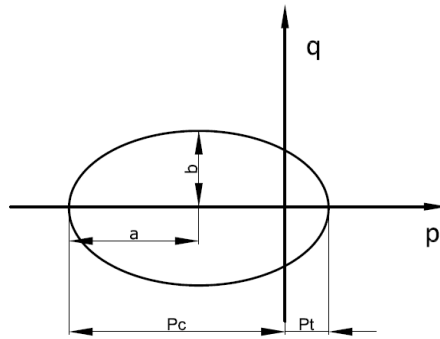


Figura 4.34 – Superfície de cedência do modelo implementado no *Abaqus*

Neste modelo, ao longo do seu encruamento, considera-se que o valor de  $p_t$  é constante, ou seja, não existe um aumento da pressão hidrostática de cedência. Como tal, a superfície não se expande segundo a direcção de tensão hidrostática. O encruamento é dado pela evolução de  $p_c$  em função da deformação volumétrica plástica. Neste modelo considera-se o parâmetro  $M_0$  constante. A função de potencial plástico corresponde a uma esfera no espaço das tensões principais.

O modelo de Cam Clay, por sua vez, tem a superfície de cedência definida por

$$\phi = \frac{1}{b^2} [p - p_t + a]^2 + \left[\frac{q}{M}\right]^2 - a^2 \quad (4.9)$$

com

$$b = \begin{cases} 1 & \text{se } p \geq p_t - a \\ \beta & \text{se } p < p_t - a \end{cases}$$

A sua superfície de cedência corresponde à representada na Figura 4.35.

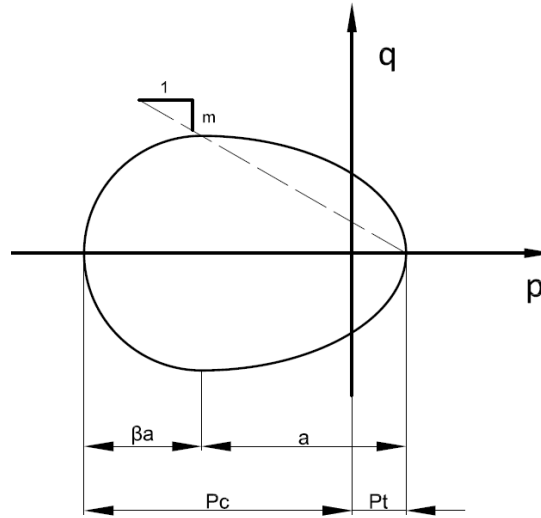


Figura 4.35 – Superfície de cedência de Cam Clay

O endurecimento é simulado com a evolução do parâmetro  $a$ , raio maior da elipse, em função da deformação volumétrica plástica.

Como se pode concluir, comparando quer as expressões analíticas, quer a representação de ambas as superfícies de cedência, o modelo do Abaqus pode ser obtido a partir de Cam Clay, bastando para tal considerar que o parâmetro  $\beta$  é igual a 1, sendo posteriormente necessário calibrar os restantes parâmetros da superfície.

O modelo Cam Clay implementado no Hyplas apresenta a possibilidade de considerar várias leis de fluxo plástico: fluxo associativo, fluxo não associativo esférico e fluxo não associativo elíptico. As simulações numéricas foram efectuadas para as três possibilidades, à excepção do primeiro exemplo, uma vez que a lei de fluxo não é uma variável com influência nos resultados. Convém referir que se for utilizado um fluxo não associativo esférico obtém-se exactamente o mesmo modelo disponível no Abaqus.

As propriedades do material utilizadas para calibração da superfície de cedência foram escolhidas de forma a obter-se o modelo implementado no Abaqus. Já que se trata de um modelo desenvolvido especificamente para caracterizar o comportamento de espumas, espera-se uma boa correspondência com os resultados reais. Pretende-se, desta forma, obter os parâmetros  $M, p_t, \beta$  e a curva que descreve a evolução de  $a$ . O modo como estes parâmetros foram obtidos demonstra-se de seguida.

Relativamente ao parâmetro  $\beta$ , como já foi referido, este tem de ser igual a 1.

Conforme proposto no paper de Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003), a pressão de compressão pode ser determinada por

$$p_c = \frac{\alpha^2}{6}(\sigma_c - \sigma_t) + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\alpha^4}{4}(\sigma_c - \sigma_t) + \alpha^2 \sigma_c \sigma_t} \quad (4.10)$$

com

$$\alpha = \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \quad (4.11)$$

Esta expressão foi utilizada, juntamente com a expressão (4.2), para se obter a evolução de  $p_t$  em função de  $\bar{\varepsilon}_p$ .

Como experimentalmente se constata que as espumas metálicas solicitadas à tracção apresentam uma rotura frágil, o parâmetro  $\sigma_t$  foi considerado constante.

Para a determinação de  $\alpha$ , utilizou-se para os parâmetros  $\eta$  e  $p_t$  a média dos valores propostos por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003).

Sendo assim, o parâmetro  $a$  é dado por:

$$a(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{p_t + p_c(\bar{\varepsilon}_p)}{2} \quad (4.12)$$

A deformação volumétrica corresponde à soma das deformações lineares. Como para a espuma em questão o coeficiente de Poisson é praticamente zero (Wierzbicki & Doyoyo, 2003) e a curva de calibração é um ensaio uniaxial, a deformação plástica volumétrica considerada corresponde à deformação plástica equivalente,  $\varepsilon_p^v = \bar{\varepsilon}_p$ .

O parâmetro  $M$  foi obtido igualando a equação da superfície de cedência (4.9) a zero para o caso de uma solicitação uniaxial, com:

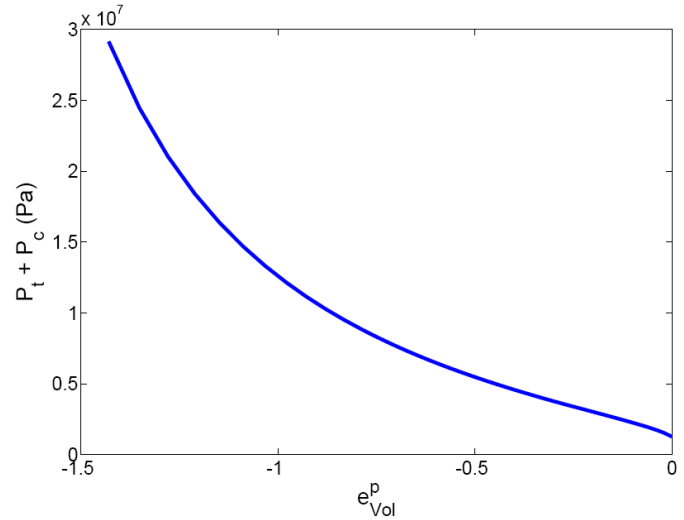
$$q = \sigma_y$$

$$p = -\frac{\sigma_y}{3}$$

Em seguida apresenta-se uma tabela com os valores considerados bem como a curva de calibração do endurecimento do material.

**Tabela 8 – Propriedades a utilizadas no modelo Cam Clay**

$E$	0.69 GPa
$\nu$	0.3
$\sigma_t$	0.92 MPa
$\sigma_{c0}$	0.95 MPa
$\eta$	1.2
$p_t$	0.61 MPa
$p_{c0}$	0.6555 MPa
$\varepsilon_d$	0.88
$n$	1.2
$\beta$	1
$M$	1.6996

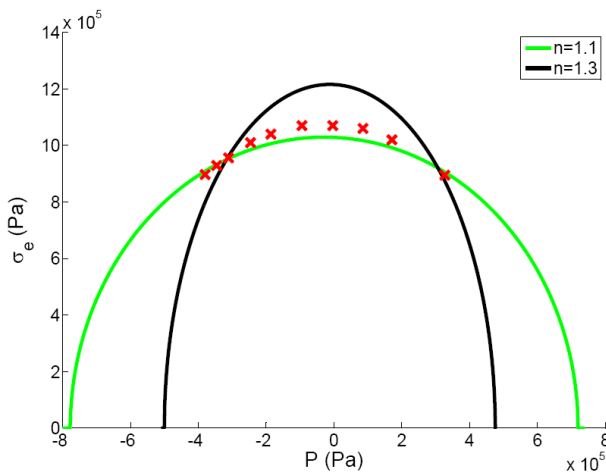


**Figura 4.36 – Curva de calibração para o modelo de Cam Clay**

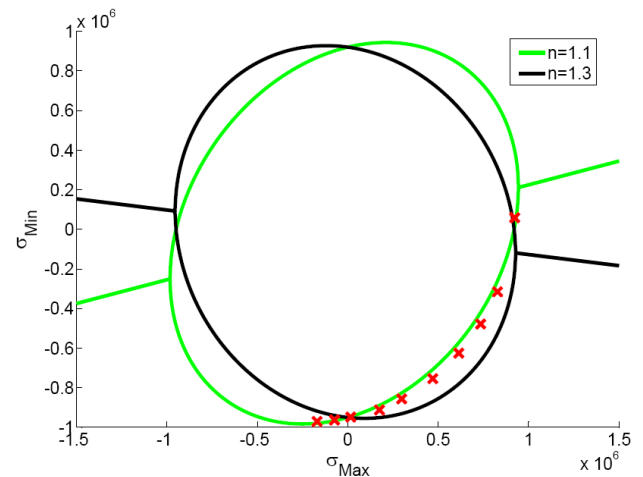
#### 4.4.1 – Tracção multiaxial com provete borboleta

À semelhança do modelo de Gurson, para a realização deste exemplo, foi necessária a implementação de um algoritmo para actualizar o estado de tensão para problemas de estado plano de tensão. A técnica utilizada encontra-se descrita no Anexo C.

Os resultados deste exemplo demonstram que a cedência inicial prevista por este modelo se encontra de acordo com os dados experimentais. Todos os pontos situam-se dentro das duas curvas que definem os limites experimentais.



**Figura 4.37 – Resultados numéricos Cam Clay, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática**



**Figura 4.38 – Resultados numéricos Cam Clay, referencial tensões principais**

#### 4.4.2 – Compressão uniaxial

Apresentam-se em seguida os resultados obtidos utilizando as diferentes leis associativas.

##### 4.4.2.1 – Fluxo associativo

Os resultados obtidos utilizando esta lei de fluxo para pequenas deformações (Figura 4.39) revelam estar mais distantes da realidade do que os obtidos utilizando o modelo de von Mises. O valor de encruamento previsto por este modelo é bastante inferior ao valor real. Este facto torna-se ainda mais evidente no caso de grandes deformações (Figura 4.40), situação na qual o modelo é completamente incapaz de acompanhar o rápido aumento de tensões à medida que o material se aproxima da deformação de densificação. Este baixo encruamento pode ser justificado, em parte, pela expansão lateral verificada durante a compressão (Figura 4.41). Devido à existência de expansão lateral, a variável de encruamento, que neste caso é a deformação volumétrica, é menor comparativamente com o caso real em que não há expansão. Desta forma o encruamento é mais lento.

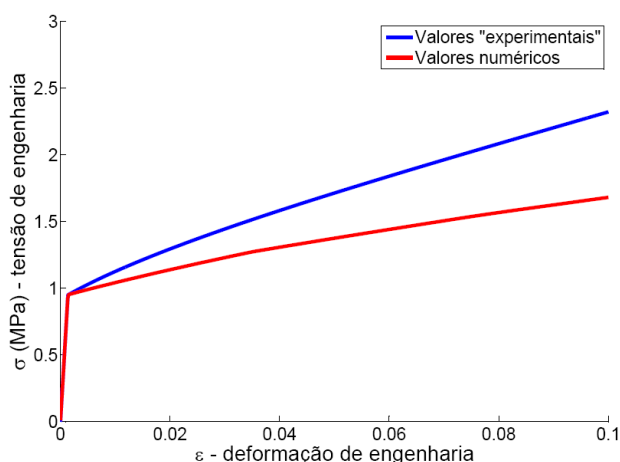


Figura 4.39 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay associativo, baixas deformações

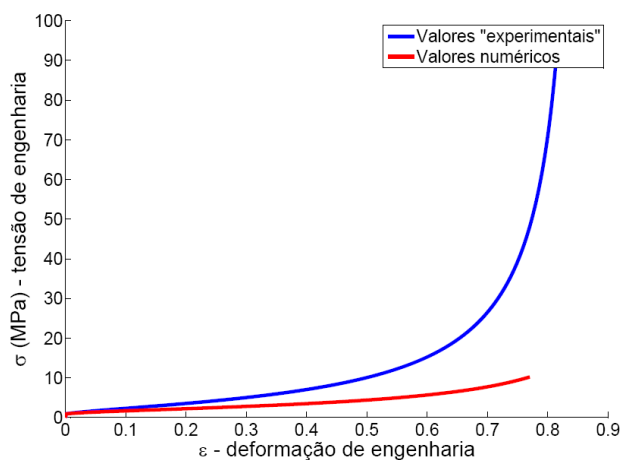


Figura 4.40 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay associativo

Como se pode observar nas Figura 4.41 e Figura 4.42, este modelo prevê uma grande expansão lateral. O raio do provete quase duplica para uma deformação uniaxial de sensivelmente 0.8.

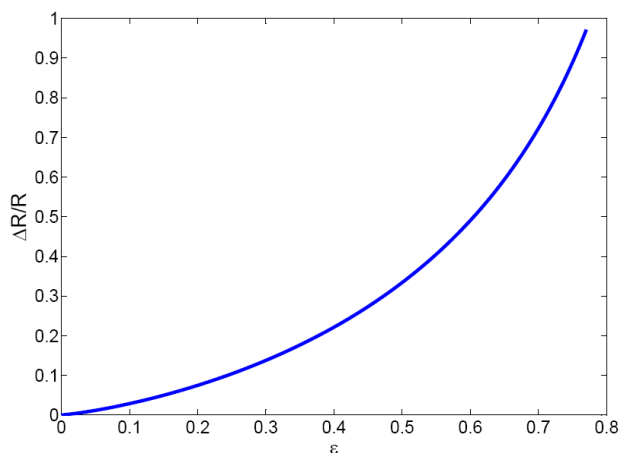


Figura 4.41 – Gráfico de  $\Delta R/R$  em função de  $\varepsilon_{yy}$  para o modelo de Cam Clay associativo

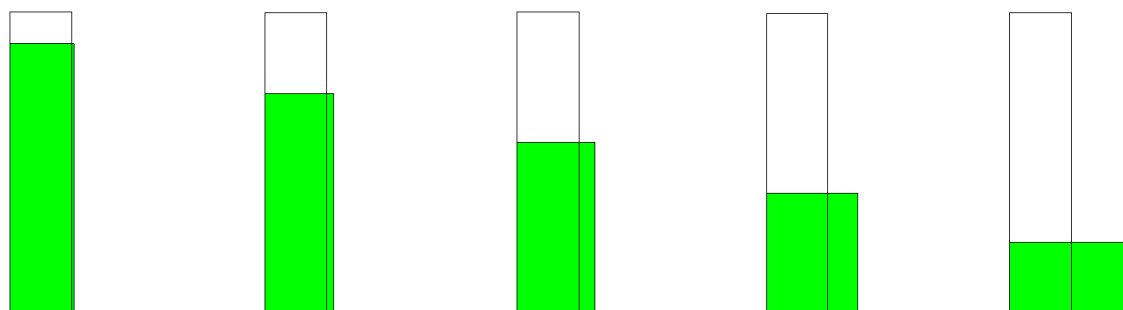
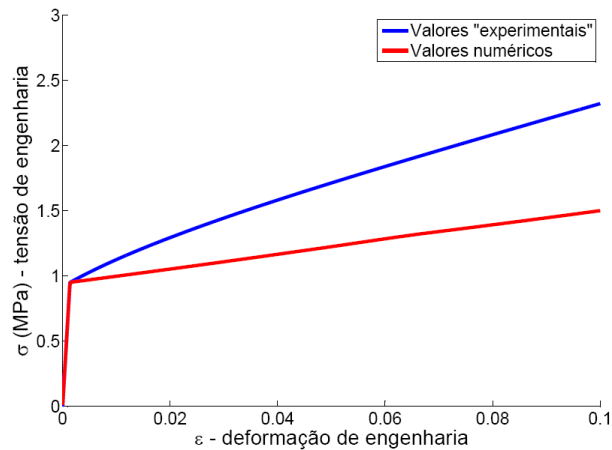


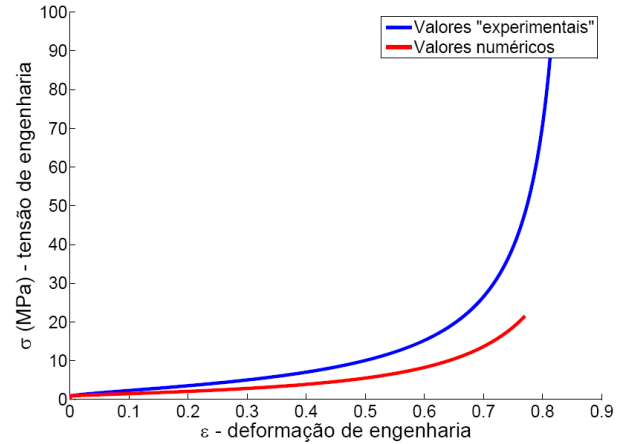
Figura 4.42 –Evolução da deformada, modelo de Cam Clay associativo

#### 4.4.2.2 – Fluxo não associativo esférico

O modelo de Cam Clay com um fluxo plástico não associativo esférico, desde que devidamente calibrado, é equivalente ao modelo que se encontra disponível no programa *Abaqus* para a análise de espumas metálicas. Como se pode ver, Figura 4.43 e Figura 4.44, os resultados são bastante semelhantes ao caso do modelo associativo, havendo no entanto uma melhoria dos resultados, principalmente para deformações próximas da densificação. Ainda assim, o comportamento do modelo perto da densificação não é inteiramente aproximado.

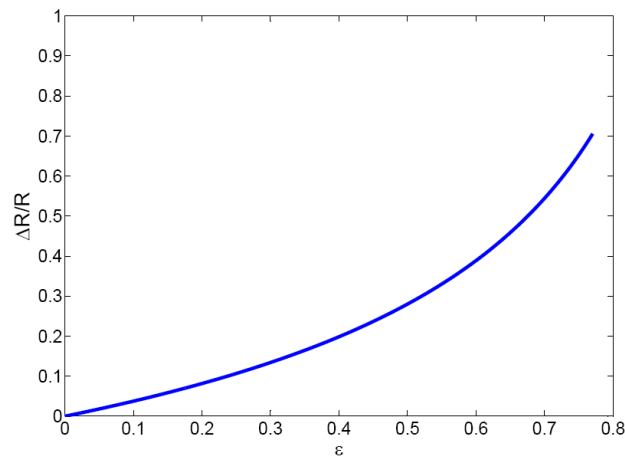


**Figura 4.43 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay esférico, baixas deformações**



**Figura 4.44 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay esférico**

Relativamente à deformada obtida, comparando a Figura 4.41 com a Figura 4.45, verifica-se que a expansão lateral ao longo do problema é menor no caso de fluxo não associativo esférico. A esta menor expansão lateral está associada uma evolução mais rápida da variável de encruamento. Este facto está de acordo com a suposição feita relativamente à relação existente entre o encruamento e a expansão lateral. Embora apresente melhores resultados comparativamente com o fluxo associativo, este modelo não consegue ainda assim aproximar completamente os resultados experimentais.



**Figura 4.45 – Gráfico de  $\Delta R/R$  em função de  $\varepsilon_{yy}$  para o modelo de Cam Clay esférico**



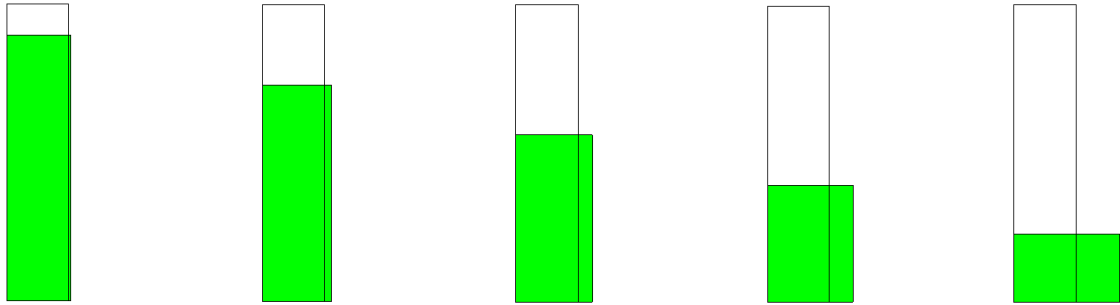


Figura 4.46 – Evolução da deformada, modelo de Cam Clay esférico

#### 4.4.2.3 – Fluxo não associativo elíptico

Utilizando esta lei de fluxo, verifica-se que o encruamento é muito mais acentuado, comparativamente com as outras duas leis de fluxo plástico. Mais uma vez é possível relacionar o encruamento com a expansão lateral do provete ao longo da compressão. Através da simulação constata-se que o coeficiente de Poisson é negativo, ou seja, há contracção radial do provete (Figura 4.49 e Figura 4.50). Esta contracção causa um aumento muito rápido da variável de encruamento, neste caso a deformação volumétrica, resultando num encruamento muito exagerado, comparativamente com os resultados experimentais (Figura 4.48).

Para pequenas deformações, este modelo é o que prevê melhor o comportamento da espuma, quando comparado com todos os modelos vistos previamente. Isto deve-se ao facto de numa primeira fase não haver praticamente variação do raio do provete, como se pode verificar na Figura 4.49. Desta forma, o encruamento encontra-se bastante próximo da realidade.

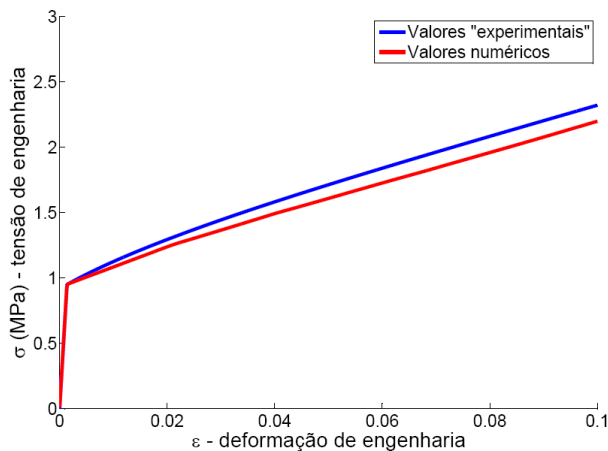


Figura 4.47 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay elíptico, baixas deformações

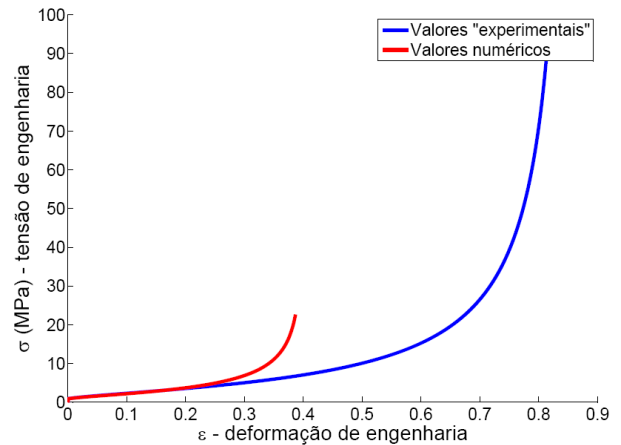


Figura 4.48 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Cam Clay elíptico

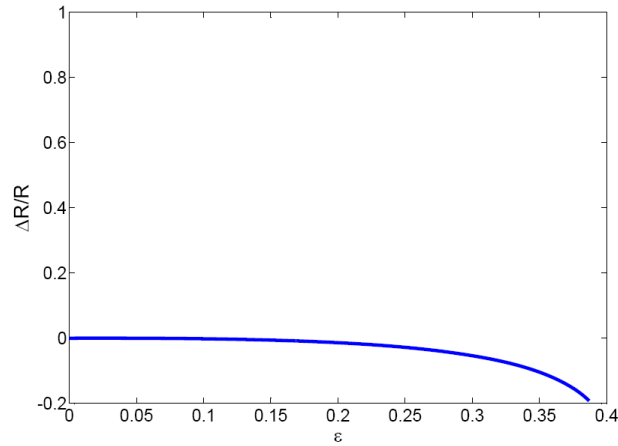


Figura 4.49 – Gráfico de  $\Delta R/R$  em função de  $\varepsilon_{yy}$  para o modelo de Cam Clay elíptico

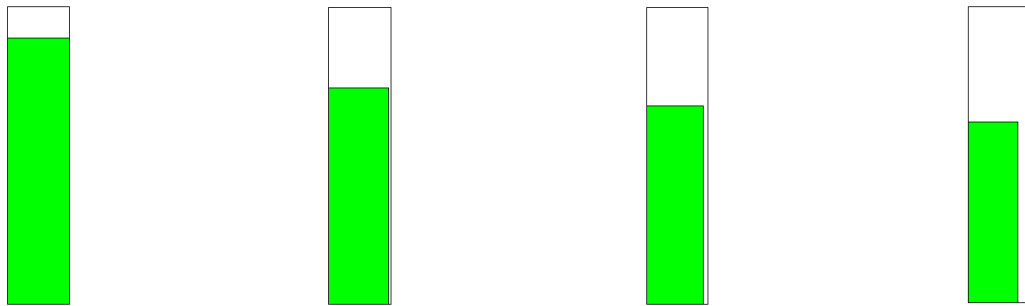


Figura 4.50 – Evolução da deformada, modelo de Cam Clay elíptico

### 4.4.3 – Indentação

#### 4.4.3.1 – Fluxo associativo

Qualitativamente, os resultados obtidos com esta lei de fluxo plástico são bastante próximos dos resultados experimentais. O deslocamento segundo Y é muito localizado na zona de indentação, não havendo praticamente deformações no resto do corpo. Também relativamente à expansão lateral se pode verificar que esta é praticamente inexistente. O provete mantém praticamente a sua forma inicial. No que diz respeito à zona de plasticidade, esta também é bastante reduzida e concentrada na zona de indentação.

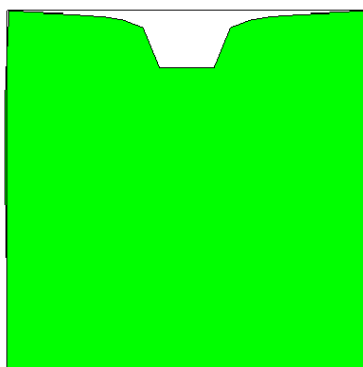


Figura 4.51 – Deformada Cam Clay Associativo, factor de multiplicação 4

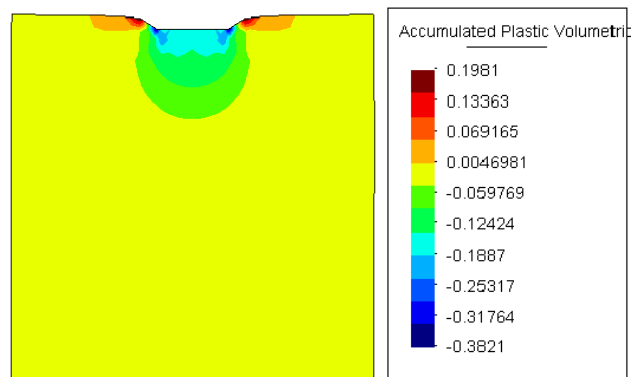


Figura 4.52 – Deformação plástica acumulada, fluxo associativo

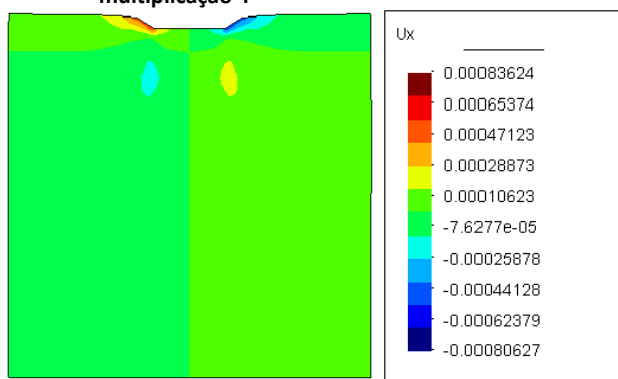


Figura 4.53 – Deslocamento xx, fluxo associativo

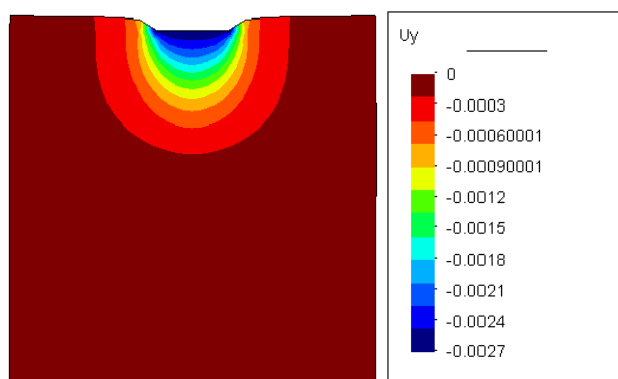


Figura 4.54 – Deslocamento yy, fluxo associativo

#### 4.4.3.2 – Fluxo não associativo esférico

A resolução deste problema não foi possível devido à incapacidade do programa Hyplas convergir para a solução. Não foi possível detectar e resolver a origem do problema devido ao curto espaço de tempo disponível para a realização deste trabalho. Ainda assim, devido à baixa deformação que está em causa neste exemplo, a lei de fluxo utilizada não deve ter uma grande influência nos resultados pelo que estes deveriam ser bastante semelhantes aos obtidos com as outras leis de fluxo testadas para este modelo.

#### 4.4.3.3 – Fluxo não associativo elíptico

No que diz respeito à distribuição da deformação plástica, Figura 4.56, os resultados são bastante semelhantes aos obtidos utilizando o modelo associativo (Figura 4.52), havendo apenas ligeiras diferenças nos valores da variável de encruamento. A nível da deformada, existe uma contracção lateral mais evidente na zona da indentação.

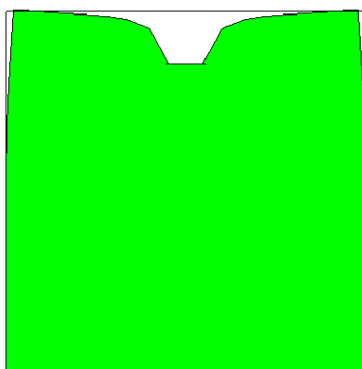


Figura 4.55 – Deformada Cam Clay elíptico, factor de multiplicação 4

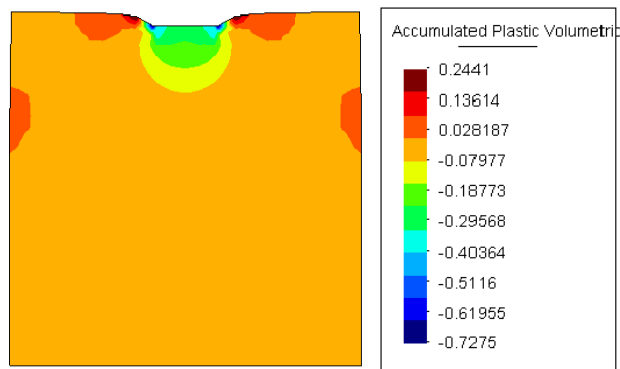


Figura 4.56 – Deformação plástica acumulada, fluxo elíptico

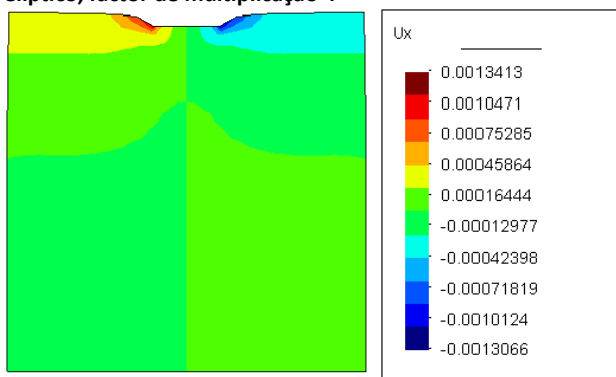


Figura 4.57 – Deslocamento xx, fluxo elíptico

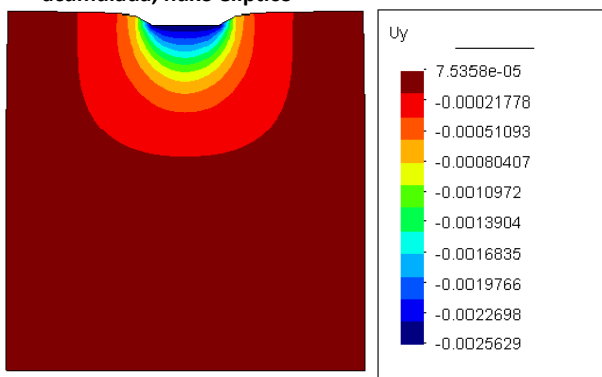


Figura 4.58 – Deslocamento yy, fluxo elíptico

De uma forma geral, os resultados apresentados por este modelo para o material em questão parecem estar de acordo com os resultados experimentais. Quer a nível de previsão de plasticidade, quer no comportamento à compressão, os resultados são relativamente satisfatórios. Através deste conjunto de simulações, foi ainda possível verificar que a variação da função de potencial plástico se traduz em grandes diferenças a nível de deformada e encruamento, diferenças essas cada vez mais evidentes com o aumento da deformação. Verificou-se ainda que os resultados obtidos para pequenas deformações são mais correctamente aproximados utilizando uma lei de fluxo não associativa elíptica. Por outro lado, para grandes deformações, a lei que melhor descreve este material é o fluxo plástico não associativo esférico. A causa apontada para este facto é a relação existente entre expansão radial e encruamento: quanto mais acentuada é a expansão radial, menor é o encruamento previsto pelo modelo. No entanto, nenhuma das leis de fluxo existentes é capaz de descrever eficazmente o modo como se dá a variação da secção no caso de um ensaio real para o material em questão. Consta-se, assim, que este modelo apresenta como principal limitação a incapacidade de descrever uma espuma com um qualquer coeficiente de Poisson plástico e, como consequência, uma incapacidade de descrever devidamente o seu encruamento. Esta limitação não será tão óbvia no caso de espumas com um coeficiente de Poisson plástico mais elevado, no entanto, para espumas de baixa densidade, como é o caso deste material, o coeficiente de Poisson plástico é praticamente zero, o que é inatingível com qualquer uma destas leis de fluxo.

## Capítulo 5

# Implementação do modelo constitutivo de Deshpande

Pretende-se, neste capítulo, descrever todas as etapas necessárias para a implementação de um modelo constitutivo. Em primeiro lugar, apresenta-se o modelo a implementar e justifica-se a razão da sua escolha, explicando as vantagens do mesmo comparativamente com os restantes. Em seguida, faz-se a dedução de todas as fórmulas analíticas, bem como dos métodos numéricos necessários para a sua implementação. Por último, após implementação, é efectuada a comparação deste modelo com os restantes, utilizando os exemplos previamente descritos no capítulo 4.

A implementação deste modelo será efectuada no código de elementos finitos “Hyplas” que, tal como já foi mencionado anteriormente, é um código aberto possibilitando assim uma boa base de trabalho para implementação/desenvolvimento de novos modelos.

O modelo que se optou por implementar foi o proposto por Deshpande (Deshpande & Fleck, 2000). O motivo que levou a esta escolha foi o facto de um dos parâmetros da superfície de cedência deste modelo, e consequentemente da lei de fluxo, ser o coeficiente de Poisson plástico. Os exemplos efectuados no capítulo anterior demonstram que um dos modelos mais utilizados para simular este tipo de materiais (modelo que se encontra disponível no Abaqus) não consegue prever correctamente o comportamento de espumas que possuam coeficientes de Poisson plástico próximos de zero. Desta forma, espera-se que a introdução deste parâmetro como variável da superfície de cedência e lei de fluxo permita tornar este modelo aplicável a uma gama mais ampla de espumas com diversos coeficientes de Poisson.

Este modelo foi desenvolvido especificamente para tratar espumas metálicas. A superfície de cedência foi desenvolvida através da correlação de dados experimentais obtidos num ensaio multiaxial. Este ensaio consiste na aplicação progressiva e simultânea de pressão hidrostática e de uma carga uniaxial, Figura 5.1. Desta forma, consegue-se obter um conjunto de pontos no plano pressão,  $p$ , versus tensão equivalente,  $q$ , que correspondem ao início de cedência, Figura 5.2.

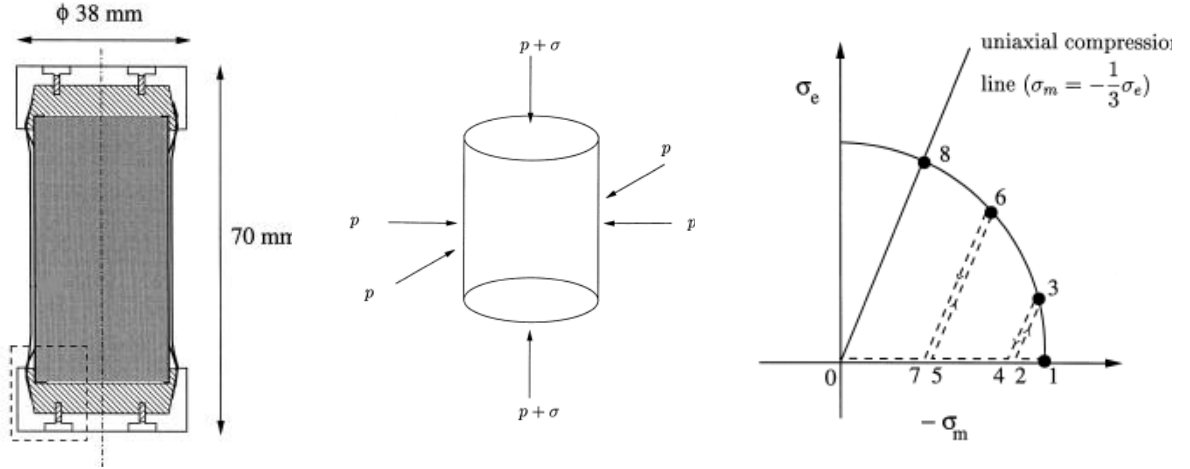


Figura 5.1 – Ensaio proposto por Deshpande (Deshpande & Fleck, 2000)

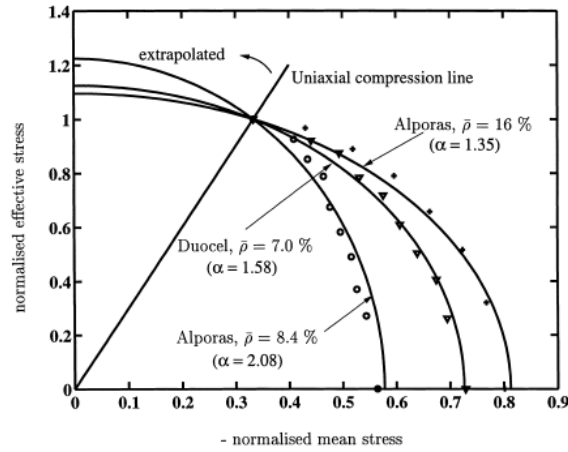


Figura 5.2 – Resultados (Deshpande & Fleck, 2000)

Tendo por base os resultados experimentais, a superfície de cedência foi definida pela seguinte expressão:

$$\Phi = \frac{q^2 + \alpha^2 p^2}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} - \sigma_y = 0 \quad (5.1)$$

em que  $\alpha$  é um parâmetro que define a forma da superfície de cedência. Considerando fluxo plástico associativo, é possível calcular o coeficiente de Poisson plástico em função deste parâmetro.

$$v_p = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} \quad (5.2)$$

A equação (5.2) pode ser resolvida em ordem a  $\alpha$ . Consegue-se, desta forma, definir a superfície de cedência em função do coeficiente de Poisson plástico da espuma.

$$\alpha^2 = \frac{9(1 - 2\nu_p)}{2(1 + \nu_p)} \quad (5.3)$$

Como se pode ver na Figura 5.3, esta superfície é um caso mais geral da superfície de von Mises, que pode ser obtida considerando  $\alpha = 0$ , resultado de um coeficiente de poisson plástico igual a 0.5.

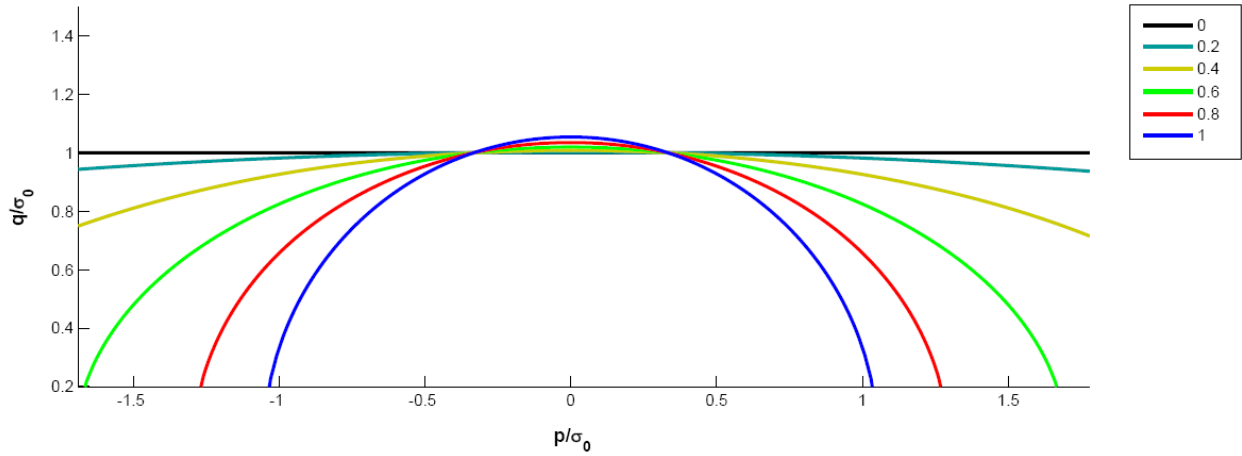


Figura 5.3 – Superfície de Deshpande em função do parâmetro  $\alpha$

O encruamento é isotrópico, Figura 5.4, e definido, tal como no caso de von Mises, pela função  $\sigma_y(\bar{\epsilon}_p)$ .

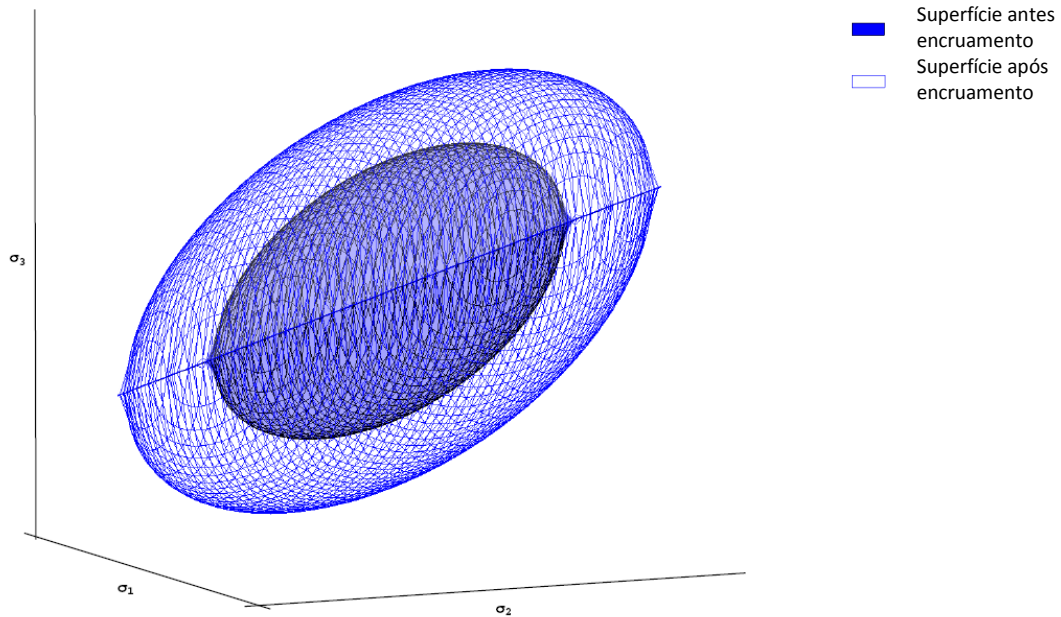


Figura 5.4 - Encruamento da superfície de Deshpande representado no referencial de Westergaard

O fluxo plástico é dado por:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} N \quad (5.4)$$

Uma vez que se pode fazer a decomposição do tensor das tensões em componente elástica e plástica, resulta a equação que descreve a evolução do tensor das deformações elásticas.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (5.5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (5.6)$$

Sendo este um modelo com fluxo associativo, o potencial plástico,  $\Psi$ , é igual à função de cedência  $\phi$ , logo,

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{N} = \frac{3q}{\sqrt{(q^2 + \alpha^2 p^2)(\alpha^2 + 9)}} \frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{3p\alpha^2}{\sqrt{(q^2 + \alpha^2 p^2)(\alpha^2 + 9)}} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.8)$$

Efectuando as derivadas tensoriais, resulta que:

$$\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} \right) = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}}} : \frac{d\mathbf{S}}{d\boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\mathbf{S}}{2q} : \frac{d}{d\boldsymbol{\sigma}} \left( \boldsymbol{\sigma} - \frac{p}{3} \mathbf{I} \right) = \frac{3\mathbf{S}}{2q} : \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) = \frac{3\mathbf{S}}{2q} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{1}{3} \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma} \right) = \frac{1}{3} \mathbf{I} \quad (5.10)$$

Por sua vez, a deformação plástica equivalente é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (5.11)$$

Substituindo nesta equação os valores de (5.4) obtém-se:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma}^2 \mathbf{N} : \mathbf{N} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N} \quad (5.12)$$

O modelo constitutivo para espumas proposto por Deshpande (Deshpande & Fleck, 2000) pode então ser resumido conforme se encontra descrito no quadro 3



**Quadro 3 – Síntese do modelo de Deshpande**

Lei elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

Superfície de cedência:

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} [q^2 + \alpha^2 p^2]} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0$$

Lei de evolução plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N}$$

Lei de evolução elástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

Evolução da variável de endurecimento:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N}$$

Critério carregamento/descarregamento:

$$\phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \phi \dot{\gamma} = 0$$

## 5.1 – Procedimento de actualização de estado

Tal como se referiu anteriormente, este procedimento é responsável por determinar as variáveis de endurecimento  $\alpha$ , o multiplicador plástico  $\dot{\gamma}$ , as deformações elásticas  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  e tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , no estado actual, conhecendo a história das deformações e o novo incremento de deformação. Os dados resultantes deste procedimento serão utilizados no cálculo das forças internas, bem como no cálculo da matriz tangente consistente.

A primeira fase para a implementação do procedimento de actualização de estado é a discretização no pseudo-tempo das equações que caracterizam o material. Para isso, é utilizado o método de “Backward Euler”, descrito no Anexo B.

Fazendo a discretização da equação (5.6), obtém-se a evolução das deformações elásticas dadas por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \gamma \mathbf{N} \quad (5.13)$$

Como se admite inicialmente que o incremento de deformação é completamente elástico, resulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.14)$$

Desta forma, o estado de tensão tentativa pode ser calculado efectuando a dupla contracção com a matriz de elasticidade:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad (5.15)$$

Substituindo a equação (5.14) na (5.13), resulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (5.16)$$

Utilizando a equação (5.15) e (5.16) obtém-se, após efectuar a dupla contracção de todos os termos com a matriz de elasticidade,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{D} : \mathbf{N}_{n+1} \quad (5.17)$$

A equação (5.16) pode ser reescrita em ordem às tensões. Após dupla contracção de (5.17) com a inversa da matriz de elasticidade, obtém-se:

$$\mathbf{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} \quad (5.18)$$

Ou seja:

$$\mathbf{D}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (5.19)$$

Fazendo a discretização da equação que descreve a evolução da variável de endurecimento (5.12) obtém-se:

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N} \quad (5.20)$$

Resulta assim o sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} &= \mathbf{0} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N} &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Sujeito às condições de carregamento/descarregamento:

$$\phi \leq 0 \quad , \quad \Delta\gamma \geq 0 \quad , \quad \phi \cdot \Delta\gamma = 0 \quad (5.22)$$

Como foi referido no capítulo 3, existem apenas duas possibilidades:

- O material está em regime elástico, como tal:  $\phi \leq 0, \Delta\gamma = 0$ . Neste caso, a resolução do sistema é directa, o estado actualizado corresponde ao estado tentativa.

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial}$$

- O material está em regime plástico, como tal:  $\phi = 0, \Delta\gamma > 0$ . Sendo assim, é necessário resolver o sistema (5.21), com a condição adicional de  $\phi = 0$ .

No caso de o material estar em regime plástico, obtém-se um sistema não linear de três equações, sendo uma delas tensorial. A primeira equação (tensorial) é proveniente da discretização da evolução das deformações plásticas (5.19), a segunda, proveniente da discretização da evolução da variável de endurecimento (5.20) e, por último, a terceira é a superfície de cedência (5.1). Neste sistema, as variáveis são o tensor das tensões no estado actual  $\sigma_{n+1}$ , a variável de encruamento,  $\bar{\varepsilon}_{n+1}^p$ , e o multiplicador plástico  $\Delta\gamma$ . Pelo facto deste sistema ser não linear, o método de resolução escolhido foi o de Newton Raphson, descrito no Anexo A.

Desta forma, é necessário em primeiro lugar definir as funções de resíduo.

#### Quadro 4 – Funções de resíduo do modelo de Deshpande

$$\mathbf{Res1} = \mathbf{D}^{-1} : (\sigma_{n+1} - \sigma_{n+1}^{trial}) + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

$$\text{Res2} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N} = 0 \quad (5.24)$$

$$\text{Res3} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2}} [q_{n+1}^2 + \alpha^2 p_{n+1}^2] - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \quad (5.25)$$

O valor do incremento das variáveis em cada iteração é obtido resolvendo o sistema de equações (5.26).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Res1}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \mathbf{Res1}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \mathbf{Res1}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial \text{Res2}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{Res2}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{Res2}}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}_{n+1}^k : \begin{bmatrix} \delta \sigma_{n+1} \\ \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta \Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Res1}(\sigma_{n+1}, \Delta\gamma, \varepsilon) \\ \text{Res2}(\sigma_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta\gamma) \\ \text{Res3}(\sigma_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{bmatrix}^k \quad (5.26)$$

A actualização das variáveis é efectuada, após resolução do sistema (5.26), por:

$$\sigma_{n+1}^{k+1} = \sigma_{n+1}^k + \delta \sigma_{n+1}^{k+1} \quad (5.27)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ k+1} = \varepsilon_{n+1}^{p\ k} + \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ k+1} \quad (5.28)$$

$$\Delta \gamma^{k+1} = \Delta \gamma^k + \delta \Delta \gamma^{k+1} \quad (5.29)$$

Para a resolução do sistema de equações (5.26) é necessário calcular a matriz com as derivadas das funções de resíduo em ordem a cada uma das variáveis. Esses cálculos são apresentados de seguida.

### Resíduo 1

$$\frac{\partial \text{Res1}}{\partial \sigma} = \mathbf{D}^{-1} + \Delta \gamma \frac{\partial N}{\partial \sigma} \quad (5.30)$$

Como  $N$  depende de  $\sigma$ , é necessário calcular a sua derivada em ordem às tensões.

Partindo da equação (5.8),

$$N = \frac{3q}{\sqrt{(q^2 + \alpha^2 p^2)(\alpha^2 + 9)}} \frac{\partial q}{\partial \sigma} + \frac{3p\alpha^2}{\sqrt{(q^2 + \alpha^2 p^2)(\alpha^2 + 9)}} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \quad (5.31)$$

por uma questão de simplicidade, é feita uma mudança de variáveis nas partes escalares:

$$a = \frac{3q}{\sqrt{(q^2 + \alpha^2 p^2)(\alpha^2 + 9)}} \quad (5.32)$$

$$b = \frac{3p\alpha^2}{\sqrt{(q^2 + \alpha^2 p^2)(\alpha^2 + 9)}} \quad (5.33)$$

Resulta:

$$N = a \frac{\partial q}{\partial \sigma} + b \frac{\partial p}{\partial \sigma} \quad (5.34)$$

A derivada do vector de fluxo em ordem ao tensor das tensões é calculada utilizando a regra da cadeia. Resulta assim:

$$\frac{\partial N}{\partial \sigma} = \frac{\partial a}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial q}{\partial \sigma} + \frac{\partial a}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial q}{\partial \sigma} + a \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial b}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial b}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial p}{\partial \sigma} + b \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \quad (5.35)$$

O cálculo das derivadas escalares é directo e resulta

$$\frac{\partial a}{\partial q} = \frac{3\alpha^2 p^2}{(q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial a}{\partial p} = -\frac{3\alpha^2 p q}{(q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial b}{\partial q} = -\frac{3\alpha^2 p q}{(q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial b}{\partial p} = \frac{3\alpha^2 q^2}{(q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} \quad (5.39)$$

O cálculo das derivadas tensoriais é efectuado de forma semelhante:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{3S}{2q} \right) = \frac{3}{2q} \frac{\partial S}{\partial \sigma} - \frac{3}{2q^2} S \otimes \frac{\partial q}{\partial \sigma} \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \sigma - \frac{1}{3} p I \right) = \mathbb{I} - \frac{1}{3} I \otimes I = \mathbb{I}_d \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) = \frac{3}{2q} \left[ \mathbb{I}_d - \frac{3}{2q^2} S \otimes S \right] \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{1}{3} I \right) = \mathbf{0} \quad (5.43)$$

Substituindo em (5.35) obtém-se finalmente a expressão para a derivada do resíduo 1 em ordem ao tensor das tensões.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Res1}}{\partial \sigma} = & \mathbf{D}^{-1} + \Delta\gamma \left[ \frac{27\alpha^2 p^2}{4q^2 (q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} S \otimes S - \frac{3\alpha^2 p}{2(q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} I \otimes S \right. \\ & + \frac{9}{2\sqrt{(q^2 + \alpha^2 p^2)(\alpha^2 + 9)}} \left[ \mathbb{I}_d - \frac{3}{2q^2} S \otimes S \right] - \frac{3\alpha^2 p}{2(q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} S \\ & \left. \otimes I + \frac{\alpha^2 q^2}{3(q^2 + \alpha^2 p^2)^{3/2} \sqrt{\alpha^2 + 9}} I \otimes I \right] \end{aligned} \quad (5.44)$$

As derivadas em relação às restantes variáveis são directas, resultando:

$$\frac{\partial \text{Res1}}{\partial \bar{\epsilon}^p} = \mathbf{0} \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \text{Res1}}{\partial \Delta\gamma} = N \quad (5.46)$$

**Resíduo 2**

As derivadas das funções de resíduo *Res2*, são dadas por:

$$\frac{\partial Res2}{\partial \sigma} = -\Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{N}:\mathbf{N}}} : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \sigma} \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = 1 \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial Res2}{\partial \gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N} \quad (5.49)$$

**Resíduo 3**

As derivadas da função de resíduo *Res3*, são dadas por:

$$\frac{\partial Res3}{\partial \sigma} = \mathbf{N} \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = -\frac{d\sigma_y}{d\varepsilon^p} = -H \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} = 0 \quad (5.52)$$

Apresenta-se em seguida, em pseudo-código, o algoritmo para a rotina de actualização de estado.

Quadro 5 – Algoritmo para actualização de estado do modelo de Deshpande

- (i) Dado o incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  calcular o estado tentativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}$$

$$p_{n+1}^{trial} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - p_{n+1}^{trial} \mathbf{I}$$

$$q_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} : \mathbf{s}_{n+1}^{trial}}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$$

- (ii) Verificar critério de plasticidade:

$$\text{Se } \phi \leq 0$$

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial}$$

*Fim de algoritmo*

*Caso contrário, continuar para (iii)*

- (iii) Resolver o sistema de equações utilizando o método de Newton Raphson

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{0} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{N} : \mathbf{N}} = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} [q_{n+1}^2 + \alpha^2 p_{n+1}^2]} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \end{array} \right.$$

Método descrito no Quadro 6

- (iv) Actualizar as variáveis

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

- (v) Sair

Quadro 6 – Algoritmo para resolução do sistema de equações do modelo de Deshpande

- (i) Inicializar o contador de iterações,  $k=0$  e definir os valores iniciais para as variáveis

$$\sigma^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\bar{\varepsilon}^p(0) = \bar{\varepsilon}_n^p$$

$$\Delta\gamma^{(0)} = 0$$

- (ii) Incrementar as iterações de Newton Raphson

- 1) Calcular vector Resíduo,  $Res^{(k)}$

$$\begin{bmatrix} Res1(\sigma_{n+1}, \Delta\gamma) \\ Res2(\sigma_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta\gamma) \\ Res3(\sigma_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \end{bmatrix}^k$$

- 2) Verificar convergência

$$Se \left( \sqrt{Res1.1^2 + Res1.2^2 + Res1.3^2 + Res1.4^2 + Res2^2 + Res3^2} \leq Tol \right)$$

*Vai para (iii)*

- 3) Calcular Matriz com derivadas dos resíduos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Res1}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res1}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res1}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}_{n+1}^k$$

- 4) Resolver o sistema de equações, para obter o incremento das variáveis:

$$\begin{bmatrix} \delta\sigma_{n+1} \\ \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \delta\Delta\gamma \end{bmatrix}^{k+1}$$

- 5) Actualizar as variáveis

$$\sigma_{n+1}^{k+1} = \sigma_{n+1}^k + \delta\sigma_{n+1}^{k+1}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ k+1} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ k} + \delta\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ k+1}$$

$$\Delta\gamma^{k+1} = \Delta\gamma^k + \delta\Delta\gamma^{k+1}$$

- 6) Voltar a (ii)

- (iii) Sair



## 5.2 – Cálculo da matriz tangente consistente

Nesta secção descreve-se o método utilizado para a determinação da matriz elastoplástica consistente com o algoritmo de actualização de tensões descrito previamente. Este cálculo é essencial para a determinação da matriz de rigidez global, efectuada em cada iteração global do sistema, Quadro 1.

Este operador consiste na derivada da função implícita  $\tilde{\sigma}$  em relação às deformações elásticas.

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}^e} \quad (5.53)$$

A matriz  $\mathbf{D}$  é prontamente calculada, fazendo a linearização do sistema de equações constituído pelas funções de resíduo.

Obtém-se assim:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Res1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res1}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res1}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial Res1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial Res1}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = \frac{\partial Res1}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{trial}} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{trial}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = -\mathbf{D}^{-1} : \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{trial}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}} = -\mathbf{D}^{-1} : \mathbf{D} = \mathbf{I} \quad (5.55)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Res1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res1}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res1}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Invertendo o sistema obtém-se

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Res1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res1}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res1}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1} : \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Que pode ser representado como:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{n+1} \\ d\bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ d\Delta\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & M_{22} & M_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Sendo assim, resulta:

$$d\sigma_{n+1} = \mathbf{M}_{11} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} \quad (5.59)$$

$$\mathbf{D}^{ep} = \frac{d\sigma_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial}} = \mathbf{M}_{11} \quad (5.60)$$

**Quadro 7 – Algoritmo para cálculo da matriz tangente de Deshpande**

**Caso elástico:**

$$\mathbf{D} = 2G \mathbf{I}_d + k \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

**Caso elástoplástico:**

i) Calcular matriz com as derivadas das funções de resíduo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Res1}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res1}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res1}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}$$

ii) Inverter matriz das derivadas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & M_{22} & M_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Res1}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res1}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res1}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} \end{bmatrix}^{-1}$$

iii) Igualar matriz elastoplástica à componente  $M_{11}$  da matriz inversa

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{M}_{11}$$

### 5.3 – Validação

A validação da implementação deste modelo foi efectuada em várias etapas. Numa fase inicial, após implementação do algoritmo de integração do material, verificou-se se este apresentava convergência quadrática local, a nível do ponto de Gauss. Uma vez que o método de resolução de Newton Raphson garante uma convergência no mínimo quadrática<sup>2</sup>, se tal não se verificasse, era indício de que se teria cometido algum erro no cálculo ou programação da matriz com as derivadas das funções de resíduo.

Simultaneamente, efectuou-se o cálculo da matriz com as derivadas dos resíduos de forma numérica, considerando a definição de derivada:

$$y' = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{y(x + \lambda) - y(x)}{\lambda} \right]$$

Estas verificações foram efectuadas a nível de ponto de Gauss num elemento sujeito a um conjunto de solicitações distintas (Figura 5.5).

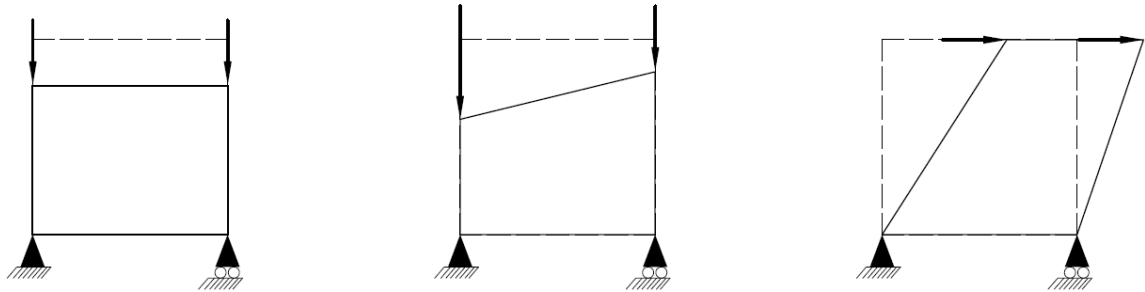


Figura 5.5 – Solicitações para verificação de convergência local

Em seguida, fez-se a implementação do cálculo da matriz elástoplástica. Desta forma já foi possível verificar a convergência global do problema. Mais uma vez, verificou-se convergência quadrática.

Após esta fase, e uma vez que este modelo é um caso geral do modelo de von Mises, foi efectuada uma comparação dos resultados obtidos para um mesmo problema, utilizando estes dois modelos. À excepção de ligeiras diferenças numéricas evidenciadas unicamente a partir da oitava casa decimal, tudo o resto se verificou igual.

Finalmente, foi utilizado este modelo para realizar os exemplos descritos no capítulo 4, para verificar a sua aplicabilidade à modelação de espumas metálicas.

Relativamente às propriedades de material necessárias para este modelo, é requerida, à semelhança do modelo de von Mises, uma curva de encruamento do material. Esta curva foi determinada da mesma forma descrita anteriormente. É ainda necessário definir o parâmetro  $\alpha$ . Este parâmetro foi calculado

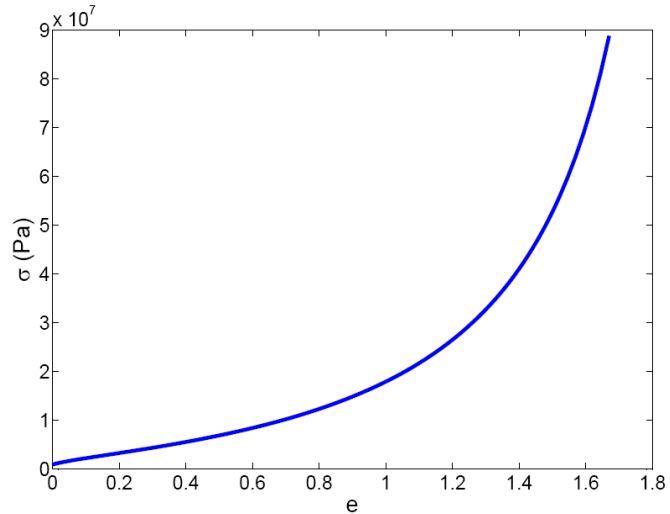
<sup>2</sup> Unicamente para valores próximos da solução

tendo por base os dados de Wierzbicki (Wierzbicki & Doyoyo, 2003) que indicam que o coeficiente de Poisson plástico para esta espuma em análise é próximo de zero para pequenas deformações.

Em seguida apresenta-se uma tabela com os dados relativos a este material.

**Tabela 9 – Propriedades utilizadas no modelo de Deshpande**

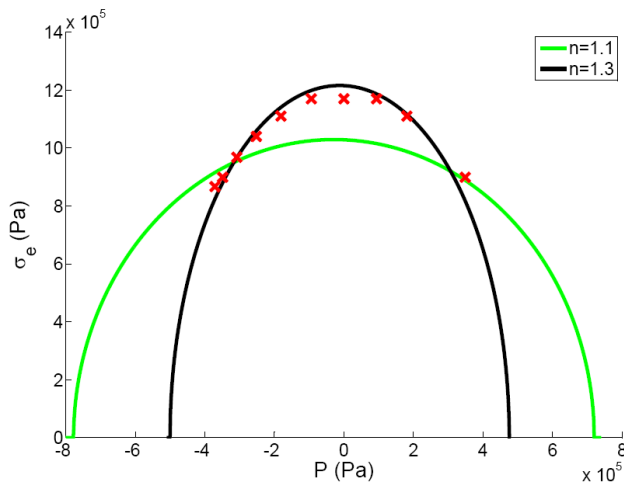
$E$	0.69 MPa
$\nu$	0.3
$\nu_p$	0
$n$	1.2
$\varepsilon_d$	0.88



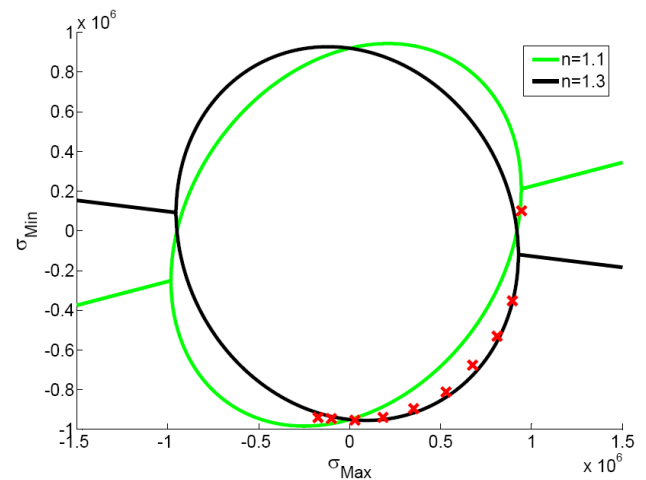
**Figura 5.6 – Curva calibração Deshpande**

### 5.3.1 – Tracção multiaxial com provete em borboleta

Os resultados deste exemplo, Figura 5.7 e Figura 5.8, revelam que todos os pontos obtidos numericamente se encontram dentro das curvas propostas por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003) relativas ao material em questão. Desta forma, fica evidente a boa correspondência que este modelo tem com a realidade, sendo capaz de retratar apropriadamente para diversos estados de tensão aplicados.



**Figura 5.7 – Resultados numéricos Deshpande, referencial tensão equivalente vs pressão hidrostática**



**Figura 5.8 – Resultados numéricos Deshpande, referencial tensões principais**

### 5.3.2 – Compressão uniaxial

Os resultados obtidos neste exemplo são consideravelmente próximos da realidade, principalmente no caso de baixas deformações (Figura 5.9). No entanto, à medida que a deformação aumenta, os resultados tendem a afastar-se dos experimentais, apresentando níveis de tensão superiores, ou seja, um encruamento mais rápido (Figura 5.10). Ainda assim, comparativamente com os modelos previamente testados, este é o que se apresenta mais próximo da realidade.

Relativamente à deformada obtida, constata-se que a deformação segundo a direcção radial é praticamente inexistente, Figura 5.11 e Figura 5.12, o que é coerente com o material em questão que apresenta um coeficiente de Poisson plástico perto de zero. Este facto deve-se à introdução do parâmetro  $\alpha$  na superfície de cedência e constitui um avanço face ao modelo de Cam Clay previamente testado, em que o coeficiente de Poisson não era uma variável.

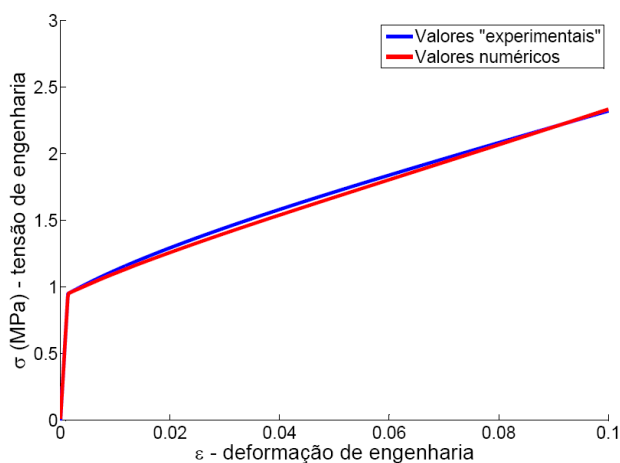


Figura 5.9 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Deshpande, baixas deformações

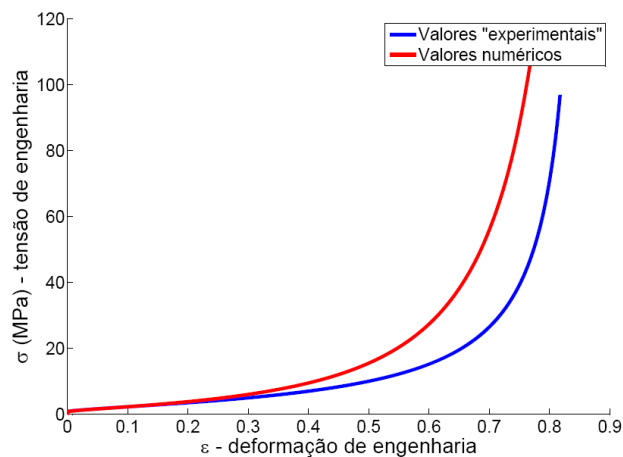


Figura 5.10 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo de Deshpande

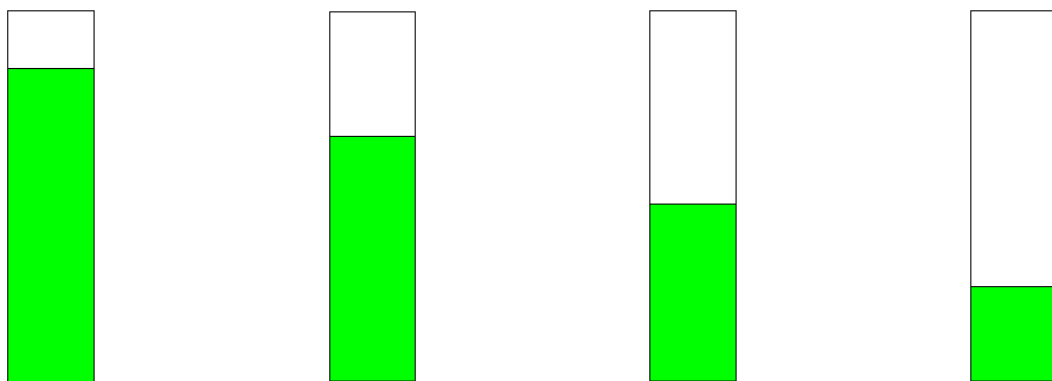


Figura 5.11 – Evolução deformada, modelo Deshpande

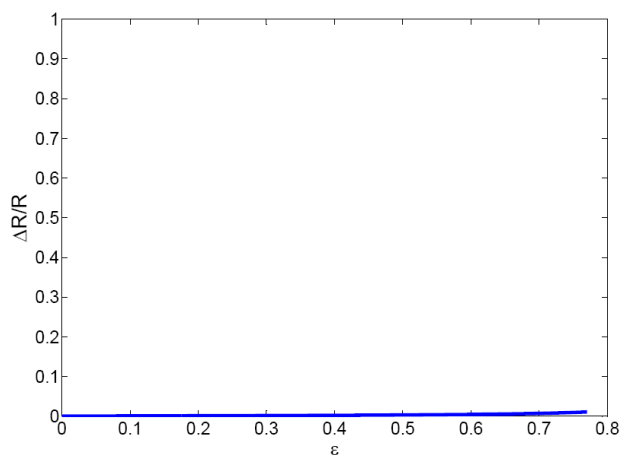


Figura 5.12 – Gráfico de  $\Delta R/R$  em função de  $\varepsilon_{yy}$  para o modelo de Deshpande

### 5.3.3 – Indentação

Os resultados deste exemplo são bastante similares aos obtidos utilizando o modelo de Cam Clay e, qualitativamente, parecem estar de acordo com a realidade. A deformação plástica é bastante concentrada na zona de indentação e a deformada é consistente com os resultados experimentais obtidos.

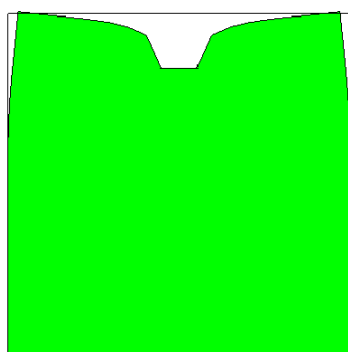


Figura 5.13 – Deformada Deshpande, factor multiplicação 4

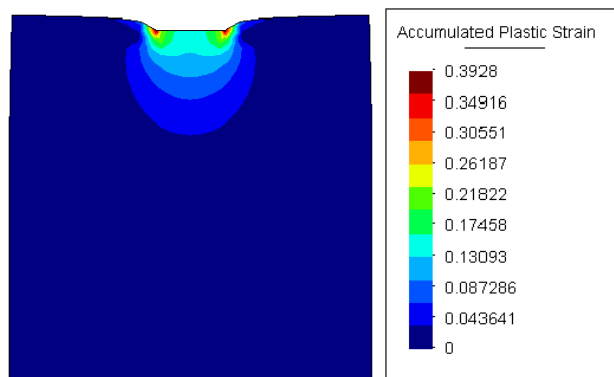


Figura 5.14 – Deformação plástica acumulada, Deshpande

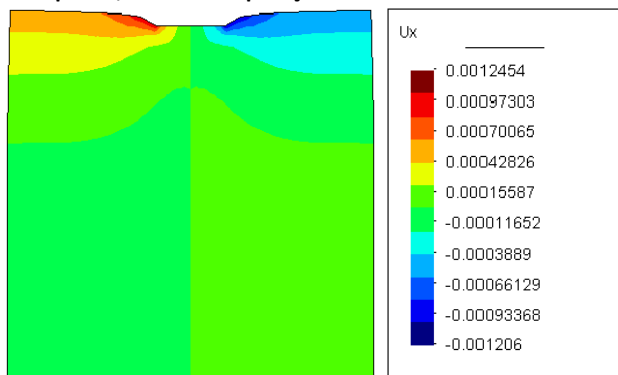


Figura 5.15 – Deslocamento xx, Deshpande

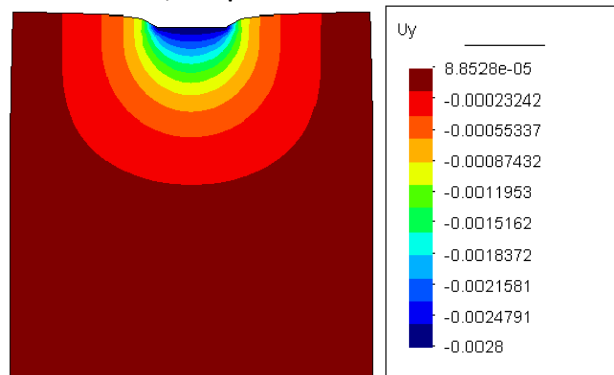


Figura 5.16 – Deslocamento yy, Deshpande

Este modelo mostrou ser apropriado para descrever o comportamento da espuma em análise. A previsão da cedência plástica está coerente com os resultados experimentais propostos por Doyoyo (Doyoyo & Wierzbicki, 2003).

Embora este modelo apresente um maior erro para grandes deformações, comparativamente com o modelo de Cam Clay com fluxo não associativo esférico, para pequenas e médias deformações os seus valores são bastante mais próximos da realidade. Unicamente a partir de valores de deformação superiores a sensivelmente 0.45 é que o modelo de Cam Clay se torna melhor.

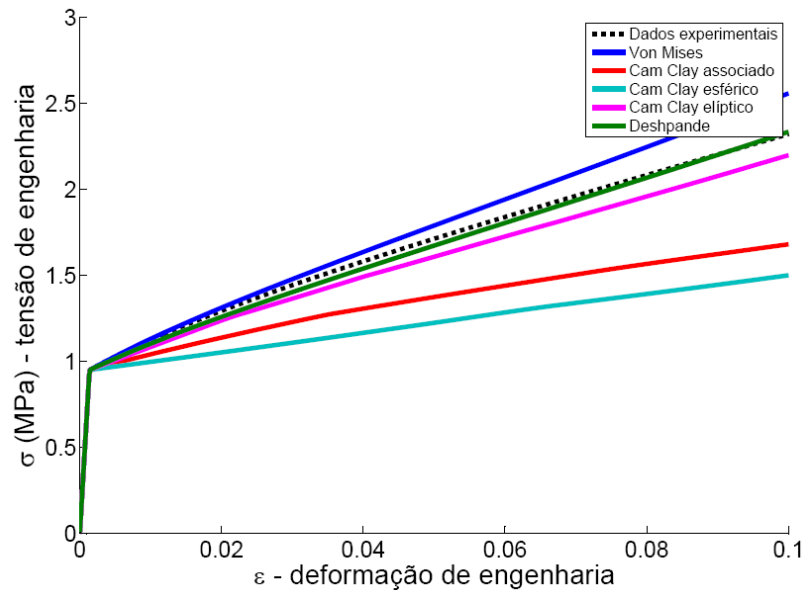


Figura 5.17 – Comparação vários modelos, baixas deformações

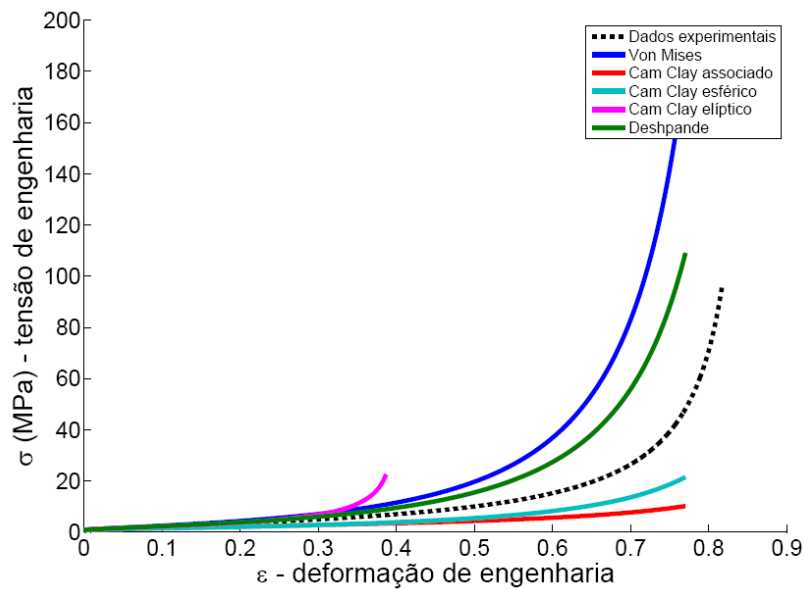


Figura 5.18 – Comparação vários modelos

Comparativamente com os modelos apresentados previamente, o modelo de Deshpande apresenta a vantagem de ter como variável o coeficiente de Poisson plástico. Desta forma, consegue retratar a compressão uniaxial de um provete sem expansão lateral do mesmo, coisa que nenhum dos modelos anteriores possibilitava. Este efeito não é muito evidente no exemplo de indentação, devido às baixas deformações atingidas. No entanto, as diferenças são óbvias, comparando os resultados obtidos na simulação de compressão uniaxial. A introdução deste parâmetro como variável da função de cedência possibilita assim uma maior aplicabilidade do modelo a espumas com diversos coeficientes de poisson. Apesar da introdução do parâmetro relativo ao coeficiente de poisson plástico constituir um avanço relativamente ao modelo de Cam Clay, este modelo ainda não consegue retratar devidamente o caso real, em que se verifica uma variação do coeficiente de poisson com a deformação. Numa fase inicial, a expansão lateral é praticamente zero e, à medida que a deformação evolui, o coeficiente de Poisson vai aumentando até atingir o valor de 0.5 aquando da densificação.

Como desvantagem perante o modelo de Cam Clay, apresenta-se o facto da tensão de cedência à compressão ou à tracção serem iguais. No entanto, para as aplicações habituais das espumas metálicas, essa solicitação não é frequente, pelo que não se torna numa grande desvantagem deste modelo. Uma outra desvantagem é a maior diferença entre os resultados numéricos e experimentais para grandes deformações.



## Capítulo 6

### Implementação de um novo modelo constitutivo

Como se pôde constatar nos capítulos anteriores, os modelos constitutivos existentes para descrever o comportamento das espumas metálicas não têm capacidade de simular devidamente o comportamento de expansão radial em compressão, motivo pelo qual, neste capítulo, se propõe uma extensão ao modelo de Deshpande que permite variar o coeficiente de Poisson plástico.

O modelo de Cam Clay, equivalente ao modelo implementado no Abaqus, apresenta uma expansão lateral aproximadamente constante ao longo de todo ensaio, sendo a mesma dependente da lei de fluxo plástico utilizada. Constata-se que não é possível com este modelo aproximar os valores diversificados de coeficiente de Poisson plástico existente para as várias espumas existentes, uma vez que este é condicionado pela lei de fluxo plástico escolhida.

O modelo de Deshpande, embora permita utilizar um coeficiente de Poisson plástico, assume que este é constante ao longo de toda a solitação. Esta situação também não está totalmente de acordo com a realidade, uma vez que o coeficiente de Poisson varia com a deformação sofrida pelo material.

O modelo proposto neste capítulo, visa colmatar essa limitação do modelo de Deshpande, introduzindo o efeito da evolução do coeficiente de Poisson plástico ao longo do carregamento através de uma relação com a deformação total equivalente.

Como foi proposto por Wierzbicki (Wierzbicki & Doyoyo, 2003), a evolução do coeficiente de Poisson plástico pode ser dada para o caso uniaxial em função da deformação uniaxial por

$$\nu_p = \nu_0 + \beta(\varepsilon)^m \quad (6.1)$$

em que  $\nu_0$ ,  $\beta$  e  $m$  são parâmetros do material determinados experimentalmente.

Neste modelo proposto, faz-se a extensão desta lei de evolução para o caso multiaxial, considerando uma deformação equivalente dada por:

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon} \quad (6.2)$$

Uma vez que este modelo é baseado no modelo de Deshpande, as equações de base são as mesmas, adicionando-se apenas mais equações para descrever a evolução do coeficiente de Poisson. Em seguida, apresenta-se um quadro com o resumo das equações deste modelo.

**Quadro 8 – Síntese do novo modelo**

Lei elástica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

Superfície de cedência:

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} [q^2 + \alpha^2 p^2]} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}^p) = 0$$

Lei de evolução plástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma} \mathbf{N}$$

Lei de evolução elástica:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

Evolução da variável de endurecimento:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N}$$

Evolução do coeficiente de poisson:

$$\alpha^2 = \frac{9(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$$

$$\nu = \nu_0 + \beta(\varepsilon_{eq})^m$$

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Critério carregamento/descarregamento

$$\phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \phi \cdot \dot{\gamma} = 0$$

## 6.1 – Procedimento de actualização de estado

Tal como se constata no Quadro 8, este modelo é baseado no modelo de Deshpande, adicionando-se apenas mais equações para descrever a evolução do coeficiente de Poisson e consequentemente do parâmetro  $\alpha$ . Uma dessas equações é diferencial, pelo que se torna assim necessário fazer a discretização da mesma, utilizando o método de Backward Euler.

Resulta assim

$$\varepsilon_{eq_{n+1}} = \varepsilon_{eq_n} + \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.3)$$

em que

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{D}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_n) + \Delta \gamma \mathbf{N} \quad (6.4)$$

À semelhança do que foi feito no modelo de Deshpande, também neste caso, para a definição do procedimento de actualização de estado, torna-se necessário resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1} &= \mathbf{0} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{N} : \mathbf{N}} &= 0 \\ \varepsilon_{eq_{n+1}} &= \varepsilon_{eq_n} + \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Este sistema está sujeito às restrições

$$\phi \leq 0 \quad , \quad \Delta \gamma \geq 0 \quad , \quad \phi \cdot \Delta \gamma = 0 \quad (6.6)$$

Verificam-se novamente apenas duas possibilidades.

- O material está em regime elástico,  $\Delta \gamma = 0$

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p$$

$$\varepsilon_{eq_{n+1}} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

- O material está em regime plástico. Sendo assim é necessário resolver o sistema (6.5), com a condição adicional de  $\phi = 0$ .

No caso plástico, o sistema de equações é resolvido utilizando o método de Newton Raphson, descrito no Anexo A

No quadro seguinte, explicitam-se as funções de resíduo que caracterizam o problema no domínio plástico:

**Quadro 9 – Funções de resíduo do novo modelo**

$$\mathbf{Res1} = \mathbf{D}^{-1}: (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + \Delta\gamma \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{0}$$

$$Res2 = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{N} : \mathbf{N} = 0$$

$$Res3 = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} [q_{n+1}^2 + \alpha^2 p_{n+1}^2]} - y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0$$

$$Res4 = \varepsilon_{eq,n+1} - \varepsilon_{eq,n} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\boldsymbol{\varepsilon} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = 0$$

O valor do incremento das variáveis em cada iteração é obtido resolvendo o sistema de equações (6.7).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Res1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial \mathbf{Res1}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \mathbf{Res1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \mathbf{Res1}}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Res2}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Res3}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial Res4}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & \frac{\partial Res4}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res4}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Res4}{\partial \varepsilon_{eq}} \end{bmatrix}^k : \begin{bmatrix} \partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \\ \partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \partial \Delta\gamma \\ \partial \varepsilon_{eq,n+1} \end{bmatrix}^{k+1} = - \begin{bmatrix} \mathbf{Res1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \Delta\gamma, \varepsilon_{eq,n+1}; \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e, trial}) \\ Res2(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta\gamma, \varepsilon_{eq,n+1}) \\ Res3(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \varepsilon_{eq,n+1}) \\ Res4(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \Delta\gamma, \varepsilon_{eq,n+1}) \end{bmatrix}^k \quad (6.7)$$

De forma semelhante ao caso do modelo de Deshpande a actualização das variáveis é realizada após a resolução do sistema de equações (6.7) por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k + \delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} \quad (6.8)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, k+1} = \bar{\varepsilon}_{n+1}^p + \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p, k+1} \quad (6.9)$$

$$\Delta\gamma^{k+1} = \Delta\gamma^k + \delta \Delta\gamma^{k+1} \quad (6.10)$$

$$\varepsilon_{eq}^{k+1} = \varepsilon_{eq}^k + \delta \varepsilon_{eq}^{k+1} \quad (6.11)$$

No que diz respeito à determinação da matriz das derivadas dos resíduos, apenas falta calcular as derivadas da função resíduo 4 em ordem a todas as variáveis, bem como as derivadas das restantes funções de resíduo em ordem à deformação equivalente,  $\varepsilon_{eq}$ . Todas as restantes componentes da matriz já foram determinadas no capítulo anterior para aplicação do modelo de Deshpande.

### **Resíduo 1**

A derivada da função de resíduo 1 em ordem à deformação equivalente é dada por:

$$\frac{\partial \text{res1}}{\partial \varepsilon_{eq}} = \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_{eq}} = \Delta\gamma \frac{\partial N}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dv_p} \frac{dv_p}{d\varepsilon_{eq}} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = -\frac{3\alpha q(2\alpha^2 p^2 + 9p^2 + q^2)}{[\alpha^4 p^2 + \alpha^2(9p^2 + q^2) + 9q^2]^{3/2}} \frac{\partial q}{\partial \sigma} + \frac{3\alpha p[\alpha^2(9p^2 + q^2) + 18q^2]}{[\alpha^4 p^2 + \alpha^2(9p^2 + q^2) + 9q^2]^{3/2}} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \quad (6.13)$$

$$\frac{d\alpha}{dv_p} = -\frac{9\sqrt{2}}{4(v_p + 1)^2 \sqrt{\frac{1 - 2v_p}{v_p + 1}}} \quad (6.14)$$

$$\frac{dv_p}{d\varepsilon_{eq}} = m\beta(\varepsilon_{eq})^{m-1} \quad (6.15)$$

### **Resíduo 2**

A derivada da função de resíduo 2, em ordem à deformação equivalente, é dada por:

$$\frac{\partial \text{Res2}}{\partial \varepsilon_{eq}} = -\Delta\gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{N}{\sqrt{N:N}} : \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_{eq}} \quad (6.16)$$

### **Resíduo 3**

De forma semelhante, obtém-se a derivada da função de resíduo 3, em ordem à deformação equivalente.

$$\frac{\partial \text{Res3}}{\partial \varepsilon_{eq}} = \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dv_p} \frac{dv_p}{d\varepsilon_{eq}} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \text{Res3}}{\partial \alpha} = \frac{3\alpha p^2}{\sqrt{(\alpha^2 + 9)(q^2 + \alpha^2 p^2)}} - \frac{3\alpha \sqrt{q^2 + \alpha^2 p^2}}{(\alpha^2 + 9)^{3/2}} \quad (6.17)$$

### **Resíduo 4**

Por último calculam-se as derivadas da função de resíduo 4 em ordem a todas as variáveis.

A derivada em ordem ao tensor das tensões obtém-se utilizando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \text{Res4}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \text{Res4}}{\partial \Delta \varepsilon} : \frac{\partial \Delta \varepsilon}{\partial \sigma} \quad (6.18)$$

em que o primeiro termo da regra da cadeia vem dado por:

$$\frac{\partial Res4}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{\Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (6.19)$$

O segundo termo a utilizar no cálculo da derivada da função Residuo 4 em ordem às tensões obtém-se derivando a expressão (6.4):

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{-1} + \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.20)$$

Desta forma, a derivada em ordem ao tensor das tensões é dada por:

$$\frac{\partial Res4}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{\Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} : \left( \mathbf{D}^{-1} + \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (6.21)$$

Uma vez que a função residuo 4 não depende da deformação plástica equivalente, a sua derivada em ordem a esta variável é zero:

$$\frac{\partial Res4}{\partial \bar{\varepsilon}^p} = 0 \quad (6.22)$$

Para o cálculo da derivada em ordem ao multiplicador plástico utiliza-se mais uma vez a regra da cadeia:

$$\frac{\partial Res4}{\partial \Delta \gamma} = \frac{\partial Res4}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \Delta \gamma} \quad (6.23)$$

Resulta assim:

$$\frac{\partial Res4}{\partial \Delta \gamma} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{\Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} : \mathbf{N} \quad (6.24)$$

Resta calcular a derivada relativamente à deformação equivalente:

$$\frac{\partial Res4}{\partial \varepsilon_{eq}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{\Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{eq}} \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{eq}} = \Delta \gamma \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varepsilon_{eq}} \quad (6.26)$$

Apresenta-se de seguida o algoritmo para a implementação deste modelo.

Quadro 10 – Algoritmo para actualização de estado do novo modelo

(i) Dado o incremento de deformação  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ , calcular o estado tentativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}$$

$$p_{n+1}^{trial} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - p_{n+1}^{trial} \mathbf{I}$$

$$q_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}_{n+1}^{trial} : \mathbf{s}_{n+1}^{trial}}$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} &= \bar{\varepsilon}_n^p \\ \varepsilon_{eq_{n+1}}^{trial} &= \varepsilon_{eq_n} \end{aligned}$$

(ii) Verificar critério de plasticidade:

$$Se\ \phi \leq 0$$

$$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{trial}$$

$$\varepsilon_{eq_{n+1}} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e}$$

*Fim de algoritmo*

*Caso contrário, continuar para (iii)*

(iii) Resolver o sistema de equações utilizando o método de Newton Raphson

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + \Delta \gamma \mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{0} \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p - \bar{\varepsilon}_n^p - \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{N} : \mathbf{N}} = 0 \\ \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2} [q_{n+1}^2 + \alpha^2 p_{n+1}^2]} - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_{n+1}^p) = 0 \\ \varepsilon_{eq_{n+1}} - \varepsilon_{eq_n} - \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \end{array} \right.$$

Método descrito no Quadro 11

(iv) Actualizar as variáveis

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \mathbf{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}$$

(v) Sair

Quadro 11 – Algoritmo para resolução do sistema de equações do novo modelo

- (i) Inicializar o contador de iterações,  $k=0$  e definir os valores iniciais para as variáveis

$$\sigma^{(0)} = \sigma_{n+1}^{trial}$$

$$\bar{\varepsilon}^p(0) = \bar{\varepsilon}_n^p$$

$$\Delta\gamma^{(0)} = 0$$

$$\varepsilon_{eq}^{(0)} = \varepsilon_{eq\ n}$$

- (ii) Incrementar as iterações de Newton Raphson

- 1) Calcular vector Resíduo,  $Res^{(k)}$

$$\begin{bmatrix} Res1(\sigma_{n+1}, \Delta\gamma, \varepsilon_{eq_{n+1}}; \varepsilon_{n+1}^{e\ trial}) \\ Res2(\sigma_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \Delta\gamma, \varepsilon_{eq_{n+1}}) \\ Res3(\sigma_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{n+1}^p, \varepsilon_{eq_{n+1}}) \\ Res4(\sigma_{n+1}, \Delta\gamma, \varepsilon_{eq_{n+1}}) \end{bmatrix}^k$$

- 2) Verificar convergência

$$Se \left( \sqrt{Res1.1^2 + Res1.2^2 + Res1.3^2 + Res1.4^2 + Res2^2 + Res3^2 + Res4^2} \leq Tol \right)$$

Vai para (iii)

- 3) Calcular Matriz com derivadas dos resíduos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial Res1}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res1}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res1}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Res1}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial Res2}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res2}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res2}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Res2}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial Res3}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res3}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res3}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Res3}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial Res4}{\partial \sigma} & \frac{\partial Res4}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial Res4}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial Res4}{\partial \varepsilon_{eq}} \end{bmatrix}_{n+1}^k$$

- 4) Resolver o sistema de equações, para obter o incremento das variáveis:

$$\begin{bmatrix} \partial \sigma_{n+1} \\ \partial \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \\ \partial \Delta\gamma \\ \delta \varepsilon_{eq_{n+1}} \end{bmatrix}^{k+1}$$



5) Actualizar as variáveis

$$\sigma_{n+1}^{k+1} = \sigma_{n+1}^k + \delta \sigma_{n+1}^{k+1}$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ k+1} = \varepsilon_{n+1}^{p\ k} + \delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^{p\ k+1}$$

$$\Delta \gamma^{k+1} = \Delta \gamma^k + \delta \Delta \gamma^{k+1}$$

$$\varepsilon_{eq}^{k+1} = \varepsilon_{eq}^k + \delta \varepsilon_{eq}^{k+1}$$

6) Voltar a (ii)

(iii) Sair

Na implementação deste algoritmo, teve de se ter em conta o domínio de aplicação de algumas das derivadas calculadas. Um exemplo é a derivada do parâmetro  $\alpha$  em ordem ao coeficiente de Poisson plástico.

$$\frac{d\alpha}{dv_p} = - \frac{9\sqrt{2}}{4(v_p + 1)^2 \sqrt{\frac{1 - 2v_p}{v_p + 1}}}$$

Como se pode ver, para valores de coeficiente de Poisson iguais ou superiores a 0.5 esta equação não é válida. A forma utilizada para contrariar este problema foi definir esta derivada como sendo igual a zero, para valores de coeficiente de Poisson fora do seu domínio de aplicabilidade. Desta forma, o algoritmo tornou-se mais robusto.

## 6.2 – Cálculo da matriz tangente consistente

A metodologia utilizada para o cálculo da matriz tangente consistente para este modelo foi semelhante à usada no modelo de Deshpande Descrito no capítulo 5. Apresenta-se em seguida as principais etapas do algoritmo utilizado.

Quadro 12 – Algoritmo para cálculo da matriz tangente do novo modelo

**Caso elástico:**

$$\mathbf{D} = 2G \mathbf{\Pi}_d + k \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

**Caso elastoplástico:**

- i) Calcular matriz com as derivadas das funções de resíduo:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \text{Res1}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{Res1}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{Res1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{Res1}}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial \text{Res2}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{Res2}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{Res2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{Res2}}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{Res3}}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial \text{Res4}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{Res4}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{Res4}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{Res4}}{\partial \varepsilon_{eq}} \end{bmatrix}$$

- ii) Inverter matriz das derivadas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{24} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34} \\ \mathbf{M}_{41} & \mathbf{M}_{42} & \mathbf{M}_{43} & \mathbf{M}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{res1}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{res1}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{res1}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{res1}}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial \text{res2}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{res2}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{res2}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{res2}}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial \text{res3}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{res3}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{res3}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{res3}}{\partial \varepsilon_{eq}} \\ \frac{\partial \text{res4}}{\partial \sigma} & \frac{\partial \text{res4}}{\partial \bar{\varepsilon}_p} & \frac{\partial \text{res4}}{\partial \Delta\gamma} & \frac{\partial \text{res4}}{\partial \varepsilon_{eq}} \end{bmatrix}^{-1}$$

- iii) Igualar matriz elasto-plástica à componente  $\mathbf{M}_{11}$  da matriz inversa:

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{M}_{11}$$

## 6.3 – Validação

A validação da implementação deste modelo passou pelas mesmas fases aplicadas na validação do modelo de Deshpande, fazendo numa primeira fase verificação de convergência quadrática a nível de cada ponto de Gauss, passando-se em seguida a verificação da convergência quadrática a nível global.

A Tabela 10 apresenta a convergência deste modelo, a nível global, para o exemplo de indentação.

**Tabela 10 – Convergência global do novo modelo**

<b>Iteração</b>	<b>Resíduo Relativo</b>
1	9.31195
2	1.71551
3	0.134249E-01
4	0.486325E-05
5	0.251115E-09

Como se pode ver, da iteração 4 para a iteração 5, a evolução do resíduo não é quadrática (o resíduo no final da quinta iteração deveria ser E-10). Tal deve-se principalmente ao limite na precisão numérica do próprio computador.

Uma vez que este modelo é uma extensão do modelo de Deshpande, que por sua vez é uma extensão do modelo de von Mises, os parâmetros do material foram calibrados para que se pudesse fazer uma comparação entre os mesmos, de forma a verificar que eram coincidentes.

### 6.3.1 – Tracção multiaxial com provete borboleta

Esta simulação não foi efectuada para este modelo uma vez que a previsão da cedência plástica é igual à do modelo de Deshpande, devido ao facto de se utilizar a mesma superfície de cedência

### 6.3.2 – Compressão uniaxial

A implementação da variação de  $\alpha$  traz mudanças evidentes na forma como a expansão lateral se desenvolve. Como é visível na Figura 6.3, numa fase inicial o provete quase não se deforma lateralmente, sendo que depois sofre uma evolução gradual à medida que a deformação na direcção axial aumenta. Relativamente ao modo como o encruamento se dá, não existe uma modificação significativa comparativamente com o modelo de Deshpande simples. Verifica-se novamente neste caso que o encruamento é mais rápido que o caso real, Figura 6.2.

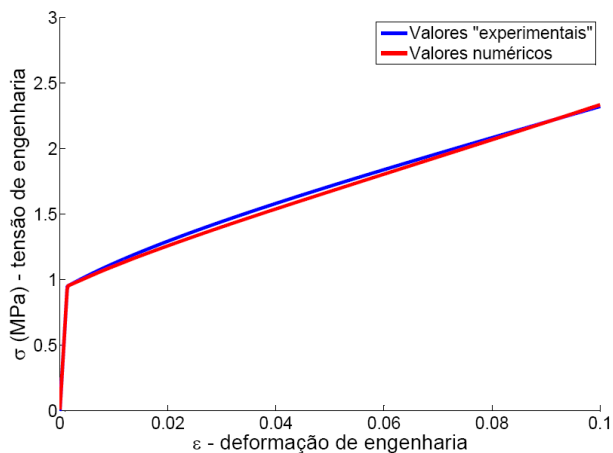


Figura 6.1 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo proposto, baixas deformações

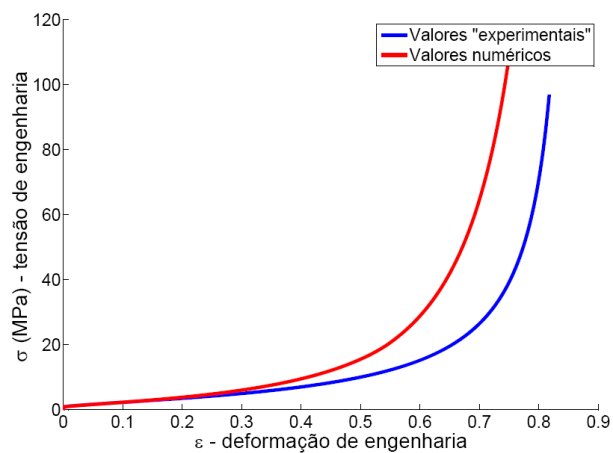


Figura 6.2 – Resposta a solicitação uniaxial utilizando modelo proposto

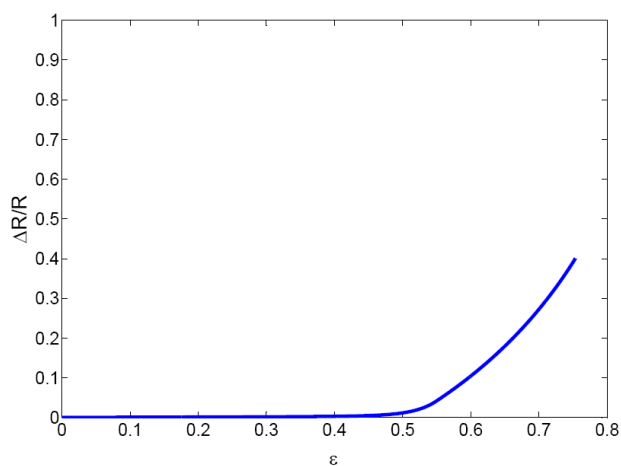


Figura 6.3 – Gráfico de  $\Delta R/R$  em função de  $\varepsilon_{yy}$  para o modelo proposto

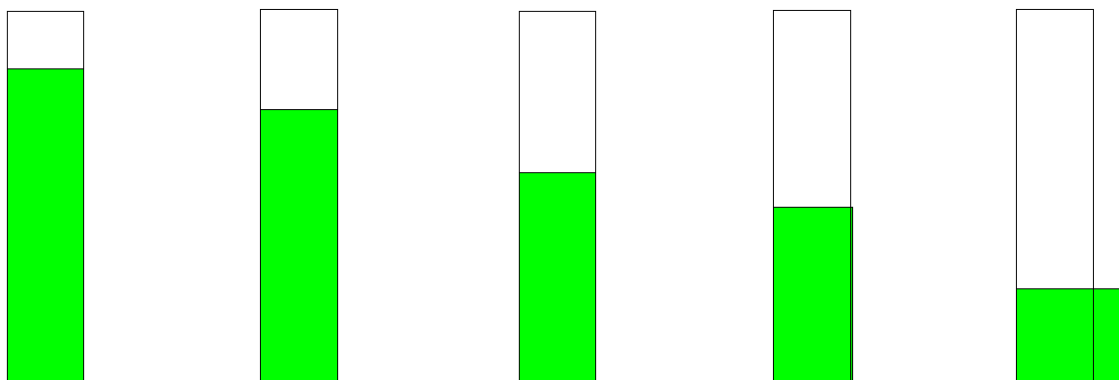


Figura 6.4 – Evolução da deformada, modelo proposto

### 6.3.3 – Indentação

Uma vez que os níveis de deformação presentes neste exemplo são relativamente baixos<sup>3</sup>, a variação do coeficiente de Poisson não é significativa. Desta forma, os resultados são em tudo semelhantes aos obtidos utilizando o modelo de Deshpande simples.

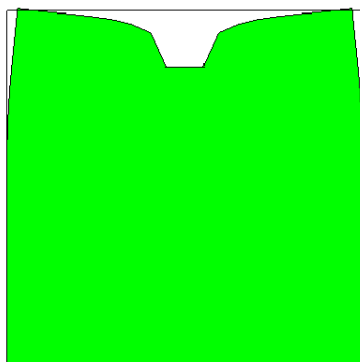


Figura 6.5 – Deformada modelo proposto

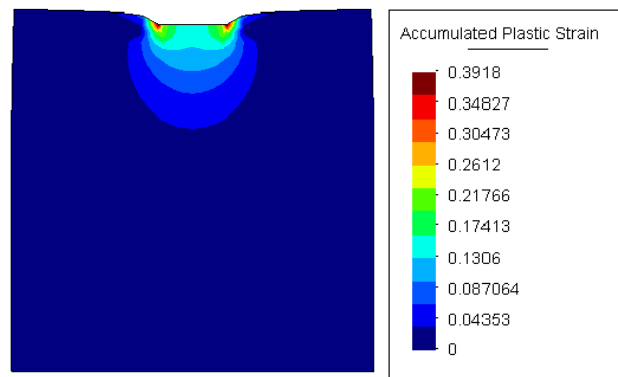


Figura 6.6 – Deformação plástica acumulada, modelo proposto

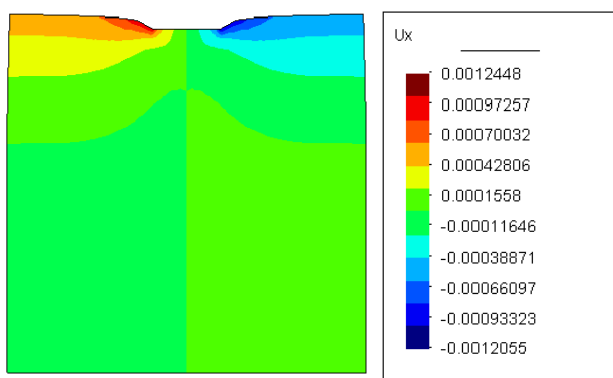


Figura 6.7 – Deslocamento xx, modelo proposto

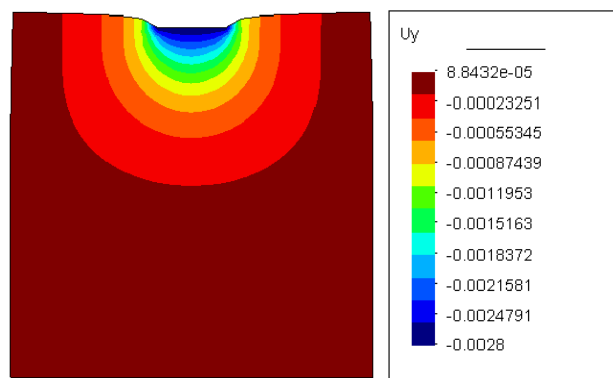
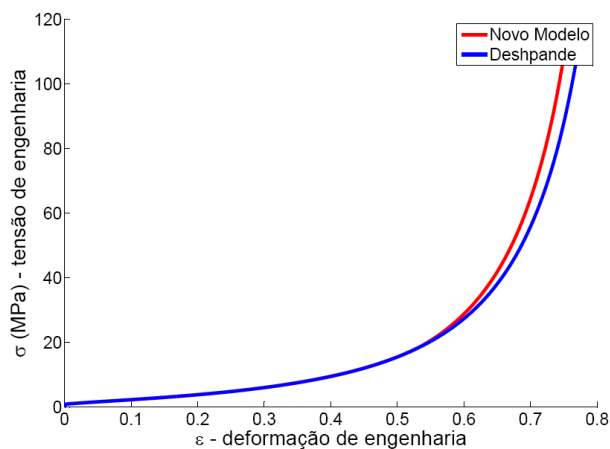


Figura 6.8 – Deslocamento yy, modelo proposto

A implementação deste novo modelo levou a resultados muito semelhantes aos obtidos utilizando o modelo de Deshpande simples. Para o material em estudo, a variação nos resultados não é muito significativa, à excepção do exemplo de compressão uniaxial, em que há efectivamente uma grande diferença na deformada resultante, sem que no entanto se reflecta significativamente na curva tensão – deformação resultante (Figura 6.9)

<sup>3</sup> Devido a limitações do programa “Hypas”, tais como inexistência de contacto ou regeneração de malha.



**Figura 6.9 – Comparação da resposta entre Deshpande simples e modelo proposto**

Relativamente a esta ligeira diferença existente, a causa poderá estar associada ao facto de não se ter considerado na curva de calibração do material a variação da secção resistente aquando do cálculo da tensão real. Não é possível, no entanto, com os dados experimentais disponíveis, arranjar uma aproximação mais exacta para utilizar na calibração deste novo modelo.

Para avaliar correctamente as possibilidades deste modelo, seria necessário efectuar mais exemplos, para diversas espumas, com várias leis de evolução do coeficiente de Poisson, comparando-os em seguida com dados de ensaios experimentais. Tal não é efectuado neste trabalho devido à inexistência dos mesmos resultados experimentais. Ainda assim, dada à possibilidade de se incluir a variação do coeficiente de Poisson, ficou evidente que este modelo constituiu um avanço relativamente ao modelo de Deshpande simples. Esta modificação será tanto mais evidente quanto maior for a variação do coeficiente de Poisson ao longo da deformação da espuma. Embora nas simulações efectuadas não se tenha verificado uma alteração significativa nas curvas de reacção, para outros problemas, sujeitos a outras restrições, é possível que esta diferença se torna mais patente.

## Capítulo 7

# Síntese, Conclusões, Sugestões para trabalhos futuros

### 7.1 – Síntese do trabalho desenvolvido

O objectivo inerente a este trabalho era contribuir para uma melhor compreensão do comportamento das espumas metálicas, fazendo um estudo comparativo e essencialmente numérico de alguns tipos de modelos existentes para o cálculo das mesmas.

Numa fase inicial, fez-se uma apresentação das espumas metálicas, dos processos de fabrico utilizados e das respostas típicas a determinadas solicitações. Esta fase é importante na medida em que fornece uma melhor capacidade crítica dos resultados obtidos numericamente. Em seguida, efectuou-se um conjunto de exemplos diversificados, utilizando vários modelos constitutivos (von Mises, Gurson, Cam Clay), para ver de que forma estes são capazes de descrever o comportamento das espumas metálicas.

Após a identificação de uma limitação comum a todos eles, foi implementado o modelo de Deshpande, que atenuou a limitação verificada nos casos anteriores. Constatou-se, ainda assim, que este modelo apresentava uma incoerência com os resultados experimentais, motivo pelo qual se desenvolveu e implementou um novo.

### 7.2 – Conclusões

Os objectivos traçados inicialmente para este trabalho foram atingidos.

Testando os vários modelos, verificou-se que o de von Mises não é indicado para a previsão da cedência das espumas metálicas. O facto de a sua superfície de cedência não ter como parâmetro a pressão hidrostática não permite representar devidamente o comportamento de cedência plástica para todas as solicitações, uma vez que experimentalmente se verifica que há plasticidade em solicitações hidrostáticas puras. Esta limitação é mais evidente nos limites da pressão hidrostática: valores perto de zero ou muito elevados. No primeiro caso, o modelo prevê um estado de tensão inferior à realidade. No segundo caso, verifica-se o oposto, obtendo-se um estado de tensão superior. Porém, no caso uniaxial, em que a pressão hidrostática é um terço da tensão equivalente de von Mises, este modelo prevê correctamente a cedência.

Relativamente à evolução da deformação plástica obtida utilizando este modelo, os resultados não são os mais aproximados da realidade. O encruamento resultante deste modelo é superior ao dos resultados experimentais. No exemplo de compressão uniaxial, verificou-se ainda uma forte expansão radial do provete, situação incoerente com os ensaios experimentais e que é igualmente verificada no caso do problema de indentação. Neste último exemplo foi ainda possível verificar que a extensão da zona plástica era superior ao esperado.

Relativamente ao modelo de Gurson, constatou-se a sua total incapacidade de modelação do comportamento mecânico das espumas. A previsão de cedência é completamente inadequada, prevendo estados de tensão muito superiores aos reais. A nível da deformação plástica, o comportamento é igualmente impróprio, com níveis de tensão obtidos muito superiores. Conclui-se, assim, que os pressupostos utilizados para este modelo não são válidos para valores de dano tão elevados.

Considerando o modelo de Cam Clay, este foi o que apresentou melhores resultados entre os vários modelos inicialmente existentes. Foram testadas diferentes leis de fluxo plástico disponíveis para este modelo. Verificou-se uma grande dependência entre a lei escolhida e os resultados obtidos. A lei de fluxo plástico condiciona a expansão radial do provete em solicitações de compressão, que por sua vez condiciona o encruamento. Das três leis de fluxo plástico disponíveis (fluxo plástico associado, fluxo plástico esférico e fluxo plástico elíptico) a que melhor se aproxima da realidade é a esférica. Com esta lei de fluxo e a correcta definição de mais alguns parâmetros, este modelo corresponde exactamente ao modelo implementado no software comercial Abaqus. Foi deste modo possível avaliar o desempenho de um dos modelos mais utilizados na modelação de espumas.

A nível de previsão do início de cedência plástica, os resultados obtidos com este modelo são coincidentes com os dados experimentais. Já relativamente ao comportamento do modelo no domínio plástico, verifica-se que não se consegue retratar devidamente o encruamento utilizando qualquer uma das três leis de fluxo disponíveis. O fluxo associativo ou o fluxo esférico prevêem um encruamento inferior à realidade. Utilizando encruamento elíptico, o oposto acontece. Verificou-se, ainda, que a expansão radial não é um parâmetro que se possa controlar eficazmente neste modelo, sendo dependente das leis de fluxo. Ora, as espumas metálicas apresentam uma grande variedade de coeficientes de poisson plástico. No caso em análise, este coeficiente era de aproximadamente zero, situação que não foi devidamente prevista utilizando este modelo.

O modelo de Deshpande, que foi implementado e testado nesta tese, apresenta como principal vantagem o facto de ter na sua definição, como parâmetro da sua superfície de cedência, o coeficiente de Poisson plástico. Desta forma, foi possível colmatar a limitação verificada em todos os modelos previamente referidos. Este modelo permitiu obter deformadas mais coerentes e uma maior versatilidade. A nível do encruamento do modelo, para baixas e médias deformações, os resultados são muito próximos da realidade. À medida que a deformação aumenta, para valores perto da densificação, a precisão diminui, obtendo-se resultados relativamente distantes da realidade, superiores.



O avanço proposto nesta tese consistiu no desenvolvimento e implementação de um novo modelo, que tem em conta a variação do coeficiente de Poisson plástico durante a deformação do material. Os dados experimentais (Wierzbicki & Doyoyo, 2003) revelam que este valor não é constante e que depende da deformação. Este novo modelo foi baseado no de Deshpande. Os resultados obtidos demonstram que se conseguiu aproximar melhor a evolução da deformada resultante do ensaio de compressão uniaxial. Para baixas variações do coeficiente de Poisson, os valores são em tudo semelhantes aos do modelo de Deshpande simples. No caso do material utilizado neste trabalho, as diferenças entre os dois modelos só se evidenciam para deformações elevadas, altura em que os resultados são pouco coerentes com a realidade. No entanto, para outros tipos de espumas, é possível que essa diferença se faça sentir antecipadamente trazendo melhorias. De forma a perceber melhor as vantagens deste modelo, seria essencial a realização de mais comparações com valores obtidos experimentalmente. Infelizmente, devido à baixa disponibilidade de dados, tal não foi possível. De resto, uma das maiores dificuldades enfrentadas nesta tese foi precisamente a escassez e a dispersão de resultados experimentais e até mesmo a contrariedade das propriedades mecânicas das espumas.

Este trabalho permitiu ainda melhorar os conhecimentos a nível da mecânica computacional. O desenvolvimento e implementação de um novo modelo constitutivo levaram a uma melhor compreensão dos algoritmos de integração bem como de algumas técnicas numéricas utilizadas.

### **7.3 – Sugestões para trabalhos futuros**

Ao longo de todas as fases desta tese, foi possível constatar que ainda existe muito trabalho a desenvolver em praticamente todas as áreas relacionadas com as espumas metálicas. Por um lado, os processos de fabrico ainda não se encontram devidamente caracterizados e controlados, pelo que o estudo e simulação numérica dos mesmos é um tema de estudo bastante amplo.

Também a nível de modelos matemáticos para simulação deste material, ficou evidente que os modelos existentes, e amplamente usados, são pouco exactos. Embora nesta tese se tenha abordado exclusivamente o tema das espumas metálicas isotrópicas, durante a fase de pesquisa bibliográfica constatou-se que a quantidade de modelos capazes de simular a anisotropia das espumas é ainda menor e mais limitada, sendo esta uma área com imenso potencial de novos desenvolvimentos.

Ferramentas numéricas para um projecto mais avançado, como modelação do dano em espumas ou efeitos de tamanho nestas estruturas, também são escassas e limitadas.

Pelo facto de este material ainda ser muito recente no mundo da engenharia, os potenciais de estudo são imensos.

# Referências

- Abaqus, Inc. *Abaqus Analysis User's Manual* (Vols. III: Materials, Version 6.4).
- Ashby, M. F., Evans, A., Fleck, N. A., Gibson, L. J., Hutchinson, J. W., & Wadley, H. N. (2000). *Metal Foams: a design guide*. Butterworth Heinemann.
- Ashby, M. (2005). *Materials selection in mechanical design* (3rd ed.). Oxford: Butterworth Heinemann.
- Banhart, J., Ashby, M., & Fleck, N. (1999). *Metal Foams and Porous Metal Structures*. Bremen: MIT Publishing.
- Deshpande, V., & Fleck, N. (2000). Isotropic constitutive models for metallic foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48, 1253-1283.
- Doyoyo, M., & Wierzbicki, T. (2003). Experimental studies on the yield behaviour of ductile and brittle aluminum foams. *International Journal of Plasticity*, 19, 1195-1214.
- Gan, Y., Chen, C., & Shen, Y. (2005). Three-dimensional modeling of the mechanical property of linearly elastic open cell foams. *International Journal of Solids and Structures*, 42, 6628-6642.
- Gibson, L. J., & Ashby, M. F. (1997). *Celular Solids, Structure and Properties*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gurson, A. (1977). Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99, 2-15.
- Hanssen, A., Hopperstad, O., Langseth, M., & Ilstad, H. (2002). Validation of constitutive models applicable to aluminium foams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44, 359-406.
- Hinton, E., & Owen, D. R. (1977). *Finite Element Programming*. Academic Press.
- Kanaun, S., & Tkachenko, O. (2006). Mechanical properties of open cell foams: simulations by laguerre tessellation procedure. *International Journal of Fracture*, 140, 305-312.
- Li, K., Gao, X.-L., & Subhash, G. (2006). Effects of cell shape and strut cross-sectional area variations on the elastic properties of three-dimensional open-cell foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54, 783-806.
- Onck, P. (2001). Application of a continuum constitutive model to metallic foam DEN-specimens in compression. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 2947-2959.
- Roscoe, K., & Burland, J. (1968). On the generalised Stress-Strain Behaviour of 'Wet' Clay. In J. Heyman, & F. Leckie (Ed.), *Engineering Plasticity* (pp. 535-609). Cambridge: Cambridge University Press.

Souza Neto, E. A., Owen, D. R., & Perić, D. (2008). *Computational Methods for Plasticity: Theory and Application*. Wiley.

Tagarielli, V., Deshpande, V., Fleck, N., & Chen, C. (2005). A constitutive model for transversely isotropic foams, and its application to the indentation of balsa wood. *International Journal of Mechanical Sciences* , 47, 666-686.

Tekoğlu, C. (2007). *Size effects in cellular solids*. Rijksuniversiteit Groningen.

Teng, X. (2008). Numerical Prediction of slant fracture with continuum damage mechanics. *Engineering Fracture Mechanics* , 75, 2020-2041.

Wicklein, M., & Thoma, K. (2005). Numerical investigations of the elastic and plastic behaviour of an open-cell aluminium foam. *Material Science and Engineering* , 397, 391-399.

Wierzbicki, T., & Doyoyo, M. (2003). Determination of the Local Stress-Strain Response of Foams. *Journal of Applied Mechanics* , 70, 204-211.

#### **Websites consultados:**

[1] - <http://www.alulight.com/>, Em Abril de 2009

[2] - <http://www.metalfoam.net/>, Em Abril de 2009

[3] - <http://www.alcarbon.de/jcms/>, Em Abril de 2009

[4] - <http://www.ergaerospace.com/>, Em Abril de 2009

[5] - <http://www.iwu.fraunhofer.de/schaumzentrum/english/services.htm>, Em Abril de 2009

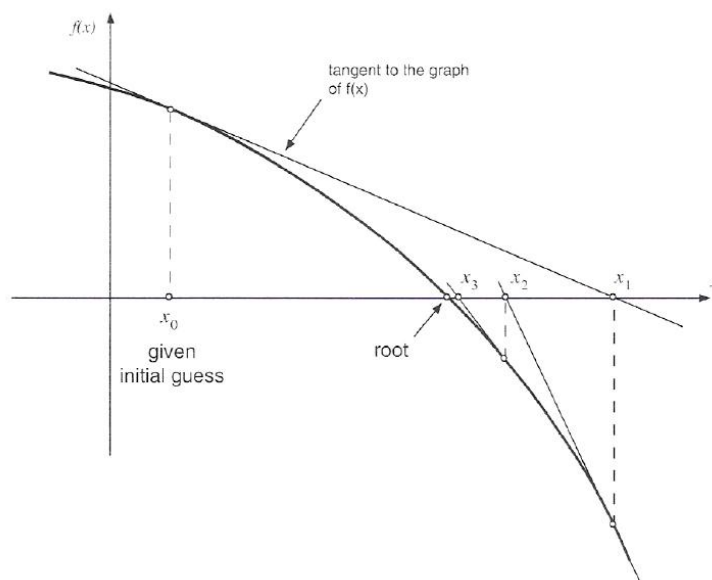
[6] - <http://www.cymat.com/>

# Anexos

## Anexo A – Método de Newton Raphson

Por uma questão de maior facilidade de compreensão, este método é inicialmente apresentado na resolução de uma única equação não linear. Em seguida, é feita a extensão do mesmo para o caso de sistemas de equações não lineares.

O modo de evolução do método é apresentado na figura seguinte.



Pretende-se resolver a equação não linear:

$$f(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Partindo de um valor inicial arbitrário,  $x_0$ , procura-se a solução correspondente à iteração seguinte, a partir da intercepção da tangente à função resíduo com o eixo das abcissas.

Fazendo a aproximação por série de Taylor, truncada ao primeiro termo, obtém-se:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \quad (\text{A.2})$$

Uma vez que se pretende que  $f(x) = 0$ , resulta:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (\text{A.3})$$

Este procedimento é repetido até que a função resíduo seja inferior a uma tolerância:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (\text{A.4})$$

Para os sistemas de equações não lineares, o princípio utilizado é o mesmo.

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$

Aplicando novamente a expansão pela série de Taylor obtém-se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (\text{A.6})$$

O que numa representação matricial equivale a:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ f_2(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)} \\ x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Mais uma vez, considerando  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{bmatrix} - \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ f_2(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(i+1)} \\ x_2^{(i+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(i+1)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{(i)} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{A}^{-1(i)} \mathbf{f}(\mathbf{x})^{(i)} \quad (\text{A.10})$$

Em alternativa à fórmula (A.10), pode-se utilizar uma equivalente, tendo por definição o incremento das variáveis,  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}$ .

$$\mathbf{A}\delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.11})$$

Esta formulação é mais eficiente computacionalmente porque evita a inversão de uma matriz. Trata-se simplesmente de uma resolução de um sistema de equações.

O algoritmo apresenta-se de seguida.

- (i) Definir tolerância, valor de arranque para as variáveis e resíduo.

$$\begin{matrix} tol \\ \mathbf{x}^{(0)} \end{matrix}$$

- (ii) Começar as iterações

$$i = i + 1$$

- (iii) Calcular a matriz com as derivadas das funções

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{(i)}$$

- (iv) Resolver o sistema de equações

$$\mathbf{A}\delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

- (v) Actualizar as variáveis

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \delta \mathbf{x}$$

- (vi) Actualizar resíduo

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}^{(i+1)}$$

- (vii) Verificar convergência

*Se  $\|\mathbf{f}\| < tol$  Fim das iteração,  $\mathbf{x}^{(i+1)}$  é a solução do sistema  
Caso contrário volta a (ii)*

## Anexo B – Método de Backward Euler

O método de Euler é um método numérico para resolução de equações diferenciais do tipo

$$y' = \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y) \quad (\text{B.1})$$

sujeito à condição inicial

$$y(x_0) = y_0 \quad (\text{B.2})$$

O estado no instante  $x_{i+1}$  é obtido a partir da expansão de  $y$  segundo uma série de Taylor truncada à primeira ordem, centrada no ponto  $x_{i+1}$ :

$$y_i = y_{i+1} - (x_{i+1} - x_i) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{i+1} \quad (\text{B.3})$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \left. \frac{dy}{dx} \right|_{i+1} \quad (\text{B.4})$$

A equação (B.4) é não linear. O método numérico utilizado para a sua resolução é o de Newton Raphson.

Este procedimento pode ser executado várias vezes para se ter uma sequência de valores aproximados para  $y$ .

## Anexo C – Implementação da análise de problemas em Estado Plano de Tensão

A metodologia utilizada para a implementação da análise de problemas de estado plano de tensão foi a imposição, em cada ponto de Gauss, das tensões da terceira componente iguais a zero. Para isso utiliza-se o método de Newton Raphson a correr sobre o algoritmo correspondente aos casos de estado plano de deformação e axisimétrico.

A principal vantagem deste método é a simplicidade e versatilidade de implementação, uma vez que não é necessário reformular toda a matemática subjacente a cada modelo de material.

Em seguida, faz-se uma descrição deste método utilizado. Para uma compreensão mais fácil, utiliza-se notação matricial.

Em cada ponto de Gauss, durante a actualização de estado, é conhecido o incremento de deformações e, conseqüentemente, o estado de deformação tentativa:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = [\varepsilon_{11}^{e\ trial} \quad \varepsilon_{22}^{e\ trial} \quad 2\varepsilon_{12}^{e\ trial} \quad \varepsilon_{33}^{e\ trial}]^T$$

À componente segundo a direcção Z, atribui-se um valor tentativa, correspondente ao estado de deformação no último incremento:

$$\varepsilon_{33}^{e\ trial}{}_{n+1} = \varepsilon_{33\ n}$$

Esta é a variável que se pretende determinar para que o resíduo, neste caso  $\sigma_{33}$ , seja zero.

Após a actualização de estado, utilizando a rotina para problemas axisimétricos, obtém-se o estado de tensão correspondente.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{33}]^T$$

No caso de  $\sigma_{33}$  ser igual a zero, a solução já está determinada. Caso contrário, é necessária nova iteração, em que se vai definir  $\varepsilon_{33}^{e\ trial}$  como:

$$\varepsilon_{33}^{e\ trial} = \varepsilon_{33}^{e\ trial} - \frac{\sigma_{33}}{D_{22}}$$

$D_{22}$  é a componente da matriz tangente axisimétrica que relaciona  $d\varepsilon_{33}$  com  $d\sigma_{33}$ .

$$\begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{12} \\ d\sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{11}^{e\ trial} \\ d\varepsilon_{22}^{e\ trial} \\ 2d\varepsilon_{12}^{e\ trial} \\ d\varepsilon_{33}^{e\ trial} \end{bmatrix}$$



O algoritmo utilizado é apresentado de seguida.

- (i) Definir o valor tentativa para a deformação plástica segundo a direcção z

$$\varepsilon_{33}^{e\ trial} = \varepsilon_{33n}^e$$

- (ii) Utilizar o algoritmo de actualização de estado para o caso axisimétrico para determinar o tensor das tensões.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{33}]^T$$

- (iii) Verificar convergência

$$\begin{array}{ll} \text{Se } |\sigma_{33}| < Tol & \text{Problema resolvido} \\ \text{Sair} & \end{array}$$

- (iv) Calcular valor tentativa para  $\varepsilon_{33}^{e\ trial}$

$$\varepsilon_{33}^{e\ trial} = \varepsilon_{33}^{e\ trial} - \frac{\sigma_{33}}{D_{22}}$$

- (v) Voltar a (ii)

Uma alternativa a este método é a elaboração de novas rotinas especificamente para o caso de estado plano de tensão. Para isso seria necessário adicionar ao sistema de equações a resolver na actualização de estado a equação:

$$\sigma_{33}(\varepsilon^e, \alpha) = 0$$